**Pierścienie Dedekinda, Lista 4**

$R$ jest pierścieniem.

1. Podać przykład ideału prymarnego, który nie jest potęgą ideału pierwszego.
2. Podać przykład niezerowej potęgi ideału pierwszego, która nie jest ideałem prymarnym.
3. Udowodnić, że jeśli $I \lhd R$ jest prymarny, to $\sqrt{I}$ jest pierwszy.
4. Niech $I \lhd R$ i załóżmy, że $\sqrt{I} \in \mathrm{Max}(R)$. Udowodnić, że $I$ jest prymarny.
5. Podać przykład $I \lhd R$, takiego że $\sqrt{I} \in \mathrm{Max}(R)$ oraz dla każdego $n \in \mathbb{N}$ mamy $I \neq (\sqrt{I})^n$.
6. Niech $R$ będzie pierścieniem Dedekinda i $I \lhd R$. Udowodnić, że $I$ jest prymarny wtedy i tylko wtedy, gdy $I$ jest potęgą ideału pierwszego.
7. Udowodnić, że jeśli $R$ jest pierścieniem Dedekinda, $I_1, I_2 \lhd R$, to istnieje $J \lhd R$ taki, że $I_1 J$ jest główny i $I_2 + J = R$.
8. Udowodnić, że każdy podpierścień $\mathbb{Q}$ jest pierścieniem Dedekinda.
9. Niech $R$ będzie pierścieniem Dedekinda i $S \subseteq R$ podzbiorem multyplikatywnym. Udowodnić, że $R_S$ jest pierścieniem Dedekinda.