Pierścienie Dedekinda, Lista 5

Niech $p \in \mathbb{N}$ będzie liczbą pierwszą, $n \in \mathbb{Z}$ i $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ spełnia $\zeta^p = 1$.

1. Niech $\mathbb{Q} \subseteq K$ będzie skończonym normalnym rozszerzeniem ciał, R całkowitym domknięciem $\mathbb{Z}$ w K i $r \in R$. Udowodnić, że r jest odwracalna wtedy i tylko wtedy, gdy $N_K(r) \in \{-1, 1\}$.

2. Udowodnić, że w $\mathbb{Z}[\zeta]$ zachodzi:

   (a) $1 - \zeta$ jest nierozkładalna.

   (b) p jest stowarzyszona z $(1 - \zeta)^{p-1}$.

   (c) Jeśli $(1 - \zeta)|n$, to $p|n$.

   (d) Jeśli $r \in \mathbb{Q}(\zeta)$ jest pierwiastkiem z 1, to $r^{2p} = 1$.

   (e) (Lemat Kummera) Dla każdej $r \in \mathbb{Z}[\zeta]$ odwracalnej istnieją $m \in \mathbb{N}$ i $s \in \mathbb{Z}[\zeta] \cap \mathbb{R}$ takie, że $r = s\zeta^m$.

3. Udowodnić, że dla każdych $x, y, z \in \mathbb{Z}$, jeśli $x^3 + y^3 = z^3$, to $3|xyz$.

4. Udowodnić, że $\mathbb{Z}[\zeta]$ jest całkowitym domknięciem $\mathbb{Z}$ w $\mathbb{Q}(\zeta)$.