Pierścienie Dedekinda, Lista 6

1. Niech $\mathbb{Q} \subseteq K$ będzie rozszerzeniem Galois i R całkowitym domknięciem $\mathbb{Z}$ w K. Dla $I \lhd R$ definiujemy $\phi(I) := |(R/I)^*|$. Udowodnić, że:

   (a) Dla $I, J \lhd S$ względnie pierwszych mamy $\phi(IJ) = \phi(I)\phi(J)$.

   (b) Jeśli P przebiega ideały pierwsze dzielące I, to mamy
   $$\phi(I) = |R/I| \prod_P (1 - \frac{1}{|R/P|}).$$

   (c) Dla $x \in R$, jeśli ideał xR jest względnie pierwszy z I, to
   $$x^{\phi(I)} \equiv 1 (\operatorname{mod} I).$$

   (d) Dla każdego $P \in \operatorname{Spec}(R)$ i $x \in R$ mamy
   $$x^{|R/P|} \equiv n (\operatorname{mod} P).$$

2. Niech $\varepsilon \in \mathbb{C}$ będzie taki, że $\varepsilon^2 = -5$.

   (a) Udowodnić, że następujące rozkłady w $\mathbb{Z}[\varepsilon]$ są rozkładami na parami niestowarzyszone elementy nierozkładalne:
   $$21 = 3 \cdot 7 = (1 + 2\varepsilon)(1 - 2\varepsilon) = (4 + \varepsilon)(4 - \varepsilon).$$

   (b) Rozłożyć ideał $(21) \lhd \mathbb{Z}[\varepsilon]$ na iloczyn ideałów pierwszych.

   (c) Używając rozkładu z (b) znaleźć rozkłady z (a).

3. Niech R będzie pierścieniem Dedekinda. Udowodnić, że $\operatorname{Cl}(R)$ jest grupą torsyjną wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego pierścienia T, jeśli $R \subseteq T \subseteq R_0$, to istnieje podzbiór multyplikatywny $S \subseteq R$ taki, że $T = R_S$.