Pierścienie Dedekinda, Lista 7

Niech M i N będą R-modułami. Ciąg homomorfizmów R-modułów

$$\ldots \to M_i \to M_{i+1} \to M_{i+2} \to \ldots$$

jest *dokładny*, gdy dla każdego i mamy

$$\mathrm{im}(M_i \to M_{i+1}) = \ker(M_{i+1} \to M_{i+2}).$$

1. Udowodnić, że jeśli M jest projektywny, to M jest *płaski*, tzn. funktor $\cdot \otimes_R M$ jest *dokładny*, tzn. dla każdego ciągu dokładnego R-modułów $0 \to M_1 \to M_2 \to M_3 \to 0$, indukowany ciąg R-modułów
$$0 \to M \otimes_R M_1 \to M \otimes_R M_2 \to M \otimes_R M_3 \to 0$$
jest dokładny.

2. Niech $S \subseteq R$ będzie podzbiorem multyplikatywnym. Udowodnić, że:
   (a) $M_S \cong R_S \otimes_R M$ (izomorfizm R_S-modułów),
   (b) $(M \otimes_R N)_S \cong M_S \otimes_{R_S} N_S \cong M_S \otimes_R N_S$.

3. Niech $f : M \to N$ będzie homomorfizmem. Udowodnić, że f jest monomorfizmem (epimorfizmem, izomorfizmem) wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $P \in \mathrm{Spec}(R)$, $f_P : M_P \to N_P$ jest monomorfizmem (epimorfizmem, izomorfizmem).

4. Załóżmy, że (R, P) jest pierścieniem lokalnym i M jest skończenie generowany. Udowodnić (korzystając z tw. Cayley'a-Hamiltona), że:
   (a) Jeśli $PM = M$, to $M = \{0\}$ (Lemat Nakayamy).
   (b) Jeśli $\{m_1, \ldots, m_n\}$ jest minimalnym zbiorem generatorów M, to $\{m_1+PM, \ldots, m_n+PM\}$ jest bazą M/PM jako R/P-przestrzeni liniowej.
   (c) Istnieje wolny R-moduł F i epimorfizm $F \to M$ taki, że indukowany homomorfizm $F/PF \to M/PM$ jest izomorfizmem.
   (d) Jesli M jest projektywny, to M jest wolny.

5. Niech p będzie liczbą pierwszą i dla każdej $x \in \mathbb{Q}^*$ weźmy $k, m, n \in \mathbb{Z}$ takie, że $p \nmid n, p \nmid m$ oraz $x = p^k \frac{n}{m}$. Definiujemy $v_p(x) := k$. Udowodnić, że dla każdych $a, b \in \mathbb{Q}^*$ mamy:
   (a) $v_p(ab) = v_p(a) + v_p(b)$,
   (b) $v_p(a + b) \geqslant \min(v_p(a), v_p(b))$.