**Pierścienie Dedekinda, Lista 8**

Niech $R$ będzie dziedziną, $(A, \leqslant)$ grupą abelową uporządkowaną i $K = R_0$.

1. Niech $R$ będzie pierścieniem Dedekinda. Udowodnić, że jeśli $\operatorname{Spec}(R)$ jest skończony, to $R$ jest PID.

2. Załóżmy, że $I_1, \ldots, I_n \trianglelefteq R$. Wtedy:

   (a) $\sqrt{I_1 \cdot \ldots \cdot I_n} = \sqrt{I_1 \cap \ldots \cap I_n} = \sqrt{I_1} \cap \ldots \cap \sqrt{I_n}$,

   (b) Jeśli $I_1, \ldots, I_n$ są *$P$-prymarne* (tzn. dla każdego $i \leqslant n$, $I_i$ jest prymarny oraz $\sqrt{I_i} = P$), to $I_1 \cap \ldots \cap I_n$ jest $P$-prymarny.

3. Niech $v : R \backslash \{0\} \to A$ będzie funkcją taką, że dla każdych $a, b \in R \backslash \{0\}$

   $$v(ab) = v(a) + v(b), \quad v(a + b) \geqslant \min(v(a), v(b)).$$

   Udowodnić, że $v$ jednoznacznie przedłuża się do waluacji $v_K : K^* \to A$.

4. Niech $v : K^* \to A$ będzie waluacją, $x, y \in K$ i $a \in A$. Udowodnić, że:

   (a) $A$ jest beztorsyjna,

   (b) $a \leqslant 0 \;\Leftrightarrow\; -a \geqslant 0$,

   (c) $v(1) = 0$, $v(x^{-1}) = -x$, $v(-x) = v(x)$,

   (d) $v(x) < v(y) \Rightarrow v(x + y) = v(x)$.

5. Niech $v : K^* \to A$ będzie waluacją. Udowodnić, że następujące warunki są równoważne:

   (a) $R_v$ jest PID.

   (b) $R_v$ jest noetherowski.

   (c) $v(K)$ jest izomorficzna z $(\mathbb{Z}, \leqslant)$ (jako grupa uporządkowana).

6. Udowodnić, że każdy pierścień waluacyjny jest normalny.