Pierścienie Dedekinda, Lista 9

R jest dziedziną i $K = R_0$.

1. Niech ϕ będzie normą na K. Udowodnić, że istnieje równoważna norma ϕ' taka, że dla każdych $x, y \in K$ mamy $\phi'(x + y) \leqslant \phi'(x) + \phi'(y)$.

2. Niech ϕ będzie normą na K, d indukowaną metryką i $(\hat{K}, \hat{d})$ uzupełnieniem (K, d). Udowodnić, że istnieją $\hat{+}, \hat{\cdot}, \hat{\phi}$ takie, że $(K, +, \cdot) \subseteq (\hat{K}, \hat{+}, \hat{\cdot})$ jest rozszerzeniem ciał i $\hat{\phi}$ jest normą na $\hat{K}$ indukującą metrykę $\hat{d}$.

3. Niech $P \in \mathrm{Max}(R)$. Udowodnić, że $\widehat{(R, P)} \cong \widehat{(R_P, PR_P)}$.

4. Niech R będzie DVR i R' podpierścieniem K zawierającym R. Udowodnić, że $R' = R$ lub $R' = K$.

5. Niech v, v' będą waluacjami na K takimi, że $v(K^*) = v'(K^*) = \mathbb{Z}$ i $R_v = R_{v'}$. Udowodnić, że $v = v'$.

6. Załóżmy, że R jest normalny, $K \subseteq L$ jest skończonym rozszerzeniem Galois i S całkowitym domknięciem R w L. Udowodnić, że dla każdych $P, Q \in \mathrm{Spec}(S)$ jeśli
$$P \cap R = Q \cap R \in \mathrm{Max}(R),$$
to istnieje $\sigma \in \mathrm{Gal}(L/K)$, taki że $\sigma(P) = Q$.