Pierścienie Dedekinda, Lista 1

Niech K będzie ciałem.

1. Udowodnić, że każdy pierścień waluacyjny jest pierścieniem lokalnym.

2. Podać przykład pierścienia lokalnego, który jest dziedziną i nie jest pierścieniem waluacyjnym.

3. Udowodnić, że jeśli pierścień waluacyjny jest noetherowski, to jest PID.

4. Niech $(A_1, \leqslant_1), (A_2, \leqslant_2)$ będą abelowymi grupami uporządkowanymi. Udowodnić, że $(A_1 \times A_2, \leqslant)$ jest abelową grupą uporządkowaną, gdzie $\leqslant$ jest porządkiem leksykograficznym.

5. Niech $(A, \leqslant)$ będzie abelową grupą uporządkowaną. Udowodnić, że:

   (a) grupa A jest beztorsyjna;

   (b) dla każdego $a \in A$ mamy
   $$a \leqslant 0 \quad \Longleftrightarrow \quad -a \geqslant 0;$$

   (c) jeśli $\Gamma_1, \Gamma_2 \subseteq A$ są dobrze uporządkowane to zbiór
   $$\Gamma_1 + \Gamma_2 := \{a_1 + a_2 \mid a_1 \in \Gamma_1, a_2 \in \Gamma_2\}$$
   jest dobrze uporządkowany;

   (d) jeśli $\Gamma_1, \Gamma_2 \subseteq A$ są dobrze uporządkowane oraz $a \in A$ to zbiór
   $$\{(a_1, a_2) \in \Gamma_1 \times \Gamma_2 \mid a_1 + a_2 = a\}$$
   jest skończony.

6. Niech $(A, \leqslant)$ będzie abelową grupą uporządkowaną i $f \in K((X^A)) \setminus \{0\}$. Udowodnić, ze f jest elementem odwracalnym w $K((X^A))$.

7. Niech R będzie dziedziną, K ciałem ułamków R i $v : R \setminus \{0\} \to A$ będzie funkcją taką, że dla każdych $a, b \in R \setminus \{0\}$ mamy:

   (a) $v(ab) = v(a) + v(b)$;

   (b) jeśli $a + b \neq 0$, to $v(a + b) \geqslant \min(v(a), v(b))$.

   Udowodnić, że v jednoznacznie przedłuża się do waluacji $v_K : K^* \to A$.

8. Niech $v : K^* \to A$ będzie waluacją oraz $x, y \in K^*$. Udowodnić, że:

   (a) $v(-x) = v(x)$;

   (b) $v(x) < v(y) \quad \Longrightarrow \quad v(x + y) = v(x)$.