Pierścienie Dedekinda, Lista 10

Niech $R \subseteq T$ będzie rozszerzeniem pierścieni i $n \in \mathbb{N}_{>0}$.

1. Załóżmy, że $\{e_1, \dots, e_n\}$ jest bazą T jako R-modułu oraz $I \trianglelefteq R$. Udowodnić, że $\{e_1 + IT, \dots, e_n + IT\}$ jest bazą T/IT jako R/I-modułu oraz
$$D(e_1 + IT, \dots, e_n + IT) = D(e_1, \dots, e_n) + I.$$

2. (Lemat Nakayamy) Niech $\mathfrak{m}$ będzie jedynym ideałem maksymalnym R oraz M będzie skończenie generowanym R-modułem. Udowodnić, że
   (a) Jeśli $\mathfrak{m}M = M$, to $M = \{0\}$.
   (b) Jeśli N jest podmodułem M takim, że $N + \mathfrak{m}M = M$, to $N = M$.

3. Załóżmy, że R jest Dedekinda, $K = R_0$, $K \subseteq L$ jest skończonym rozdzielczym rozszerzeniem ciał i T jest całkowitym domknięciem R w L. Udowodnić, że dla każdego niezerowego $I \trianglelefteq R$ mamy
$$\mathcal{N}_{L/K}(IT) = I^m,$$
gdzie $m = [L : K]$.

4. Niech R będzie pierścieniem Dedekinda, $R_0 = K$ i rozważmy wieżę skończonych rozdzielczych rozszerzeń ciał $K \subseteq L \subseteq M$. Udowodnić, że
$$\mathcal{N}_{L/K} \circ \mathcal{N}_{M/L} = \mathcal{N}_{M/K}.$$

5. Niech K będzie ciałem liczbowym, R całkowitym domknieciem $\mathbb{Z}$ w K i I niezerowym ideałem R. Udowodnić, że
$$\mathbb{N}(I)\mathbb{Z} = \mathcal{N}_{K/\mathbb{Q}}(I).$$

6. Niech R będzie pierścieniem Dedekinda, $\alpha \in T$ elementem całkowitym nad R, $F \in R[X]$ wielomianem minimalnym α i załóżmy, że $T = R[\alpha]$. Dla $P \in \mathrm{Max}(R)$, niech $F_1, \dots, F_n \in R[X]$ unormowane będą takie, że $\bar{F} = \bar{F_1}^{e_1} \dots \bar{F_n}^{e_n}$ w $R/P[X]$ (dla pewnych $e_1, \dots, e_n \in \mathbb{N}_{>0}$) oraz $\bar{F_1}, \dots, \bar{F_n}$ są nierozkładalne i parami różne. Udowodnić, że
$$PT = (PT + F_1(\alpha)T)^{e_1} \cdot \ldots \cdot (PT + F_n(\alpha)T)^{e_n}$$
jest rozkładem na ideały pierwsze w T i $f_1 = \deg(F_1), \dots, f_n = \deg(F_n)$.

7. Niech $m \in \mathbb{Z} \setminus \{1\}$ będzie bezkwadratowa, R będzie całkowitym domknięciem $\mathbb{Z}$ w $\mathbb{Q}(\sqrt{m})$ i $p > 2$ będzie liczbą pierwszą, która nie dzieli m. Udowodnić, że ideał pR jest pierwszy wtedy i tylko wtedy, gdy m nie jest kwadratem modulo p.