Pierścienie Dedekinda, Lista 11

Niech $R \subseteq T$ będzie rozszerzeniem pierścieni, $n \in \mathbb{N}_{>0}$ i p będzie nieparzystą liczbą pierwszą.

1. Załóżmy, że $R \subseteq T$ jest całkowitym rozszerzeniem pierścieni Dedekinda. Udowodnić, że indukowany homomorfizm
$$\Psi : \mathrm{Id}(R) \to \mathrm{Id}(T), \qquad \Psi(I) = IT$$
jest różnowartościowy.

2. Załóżmy, że T jest wolnym R-modułem rangi n i weźmy $t_1, \ldots, t_n \in T$. Udowodnić, że następujące warunki są równoważne:
   (a) Zbiór $\{t_1, \ldots, t_n\}$ jest bazą T nad R.
   (b) $\mathrm{Disc}(T/R)R = D(t_1, \ldots, t_n)R$.

3. Załóżmy, że $m \in \mathbb{Z}$ jest bezkwadratowa i $m \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 4)$. Udowodnić, że następujące warunki są równoważne:
   (a) Ideał $2\mathbb{Z}[\frac{1+\sqrt{m}}{2}]$ jest pierwszy.
   (b) $m \equiv 5 (\mathrm{mod}\, 8)$.

4. Udowodnić, że istnieje $P \in \mathrm{Max}(\mathbb{Z}[\zeta_p])$ taki, że
$$p\mathbb{Z}[\zeta_p] = P^{p-1}.$$

5. Dla $a, b \in \mathbb{Z}$ udowodnić, że
   (a) $\left(\frac{a}{p}\right) \equiv a^{\frac{p-1}{2}} (\mathrm{mod}\, p)$.
   (b) $\left(\frac{a}{p}\right)\left(\frac{b}{p}\right) = \left(\frac{ab}{p}\right)$.

6. Udowodnić, że
   (a) $\left(\frac{-1}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}}$.
   (b) $\left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}}$.

7. Niech R będzie całkowitym domknięciem $\mathbb{Z}$ w ciele $\mathbb{Q}(\sqrt{-m})$, gdzie $m \in \{1, 2, 3, 7, 11, 19, 43, 67\}$. Udowodnić, że R jest PID.