Pierścienie Dedekinda, Lista 12

Niech $R \subseteq T$ będzie rozszerzeniem pierścieni, $n \in \mathbb{N}_{>0}$, p będzie nieparzystą liczbą pierwszą i $\zeta := e^{\frac{2\pi i}{p}}$.

1. Alg. 1B, lista 9, zad. 16(a).
   Załóżmy, że $I \trianglelefteq R$, $P_1, \ldots, P_n \in \mathrm{Spec}(R)$ oraz $I \subseteq P_1 \cup \ldots \cup P_n$. Udowodnić, że istnieje $i \in \{1, \ldots, n\}$ takie, że $I \subseteq P_i$.

2. Udowodnić, że dla każdego $\alpha \in \mathbb{Z}[\zeta]$ istnieje $a \in \mathbb{Z}$ takie, że $p|(\alpha^p - a)$.

3. Udowodnić, że następujące zbiory są sobie równe:
   (a) $\mathbb{Q}(\zeta + \zeta^{-1})$,
   (b) maksymalne podciało $\mathbb{Q}(\zeta)$ zawarte w $\mathbb{R}$,
   (c) $\mathbb{Q}(\zeta)^{\{\mathrm{id},\sigma\}}$, gdzie σ jest sprzężeniem zespolonym obciętym do $\mathbb{Q}(\zeta)$.

4. Niech $\alpha \in \mathbb{C}$ będzie elementem całkowitym nad $\mathbb{Z}$ takim, że dla każdego $\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C})$ mamy $|\sigma(\alpha)| = 1$. Udowodnić, że α jest pierwiastkiem z 1.

5. Znaleźć przykład:
   (a) Liczby $\alpha \in \mathbb{C}$ algebraicznej nad $\mathbb{Q}$, która nie jest pierwiastkiem z 1 i takiej że dla każdego $\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C})$ mamy $|\sigma(\alpha)| = 1$.
   (b) Liczby $\alpha \in \mathbb{C}$ całkowitej nad $\mathbb{Z}$ takiej, że $|\alpha| = 1$ oraz $\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C})$ takiego, że $|\sigma(\alpha)| \neq 1$.

6. Załóżmy, że $\varepsilon \in \mathbb{Q}(\zeta)$ i że ε jest pierwiastkiem z 1. Udowodnić, że $\varepsilon = \pm\zeta^m$ dla pewnej $m \in \mathbb{Z}$.

7. Udowodnić pierwszy przypadek wielkiego twierdzenia Fermata dla
$$x^3 + y^3 = z^3.$$