Pierścienie Dedekinda, Lista 13

Niech R będzie pierścieniem i M, N będą R-modułami.

1. Udowodnić, że następujące warunki są równoważne:
   (a) Istnieje R-moduł M' taki, że R-moduł $M \oplus M'$ jest wolny.
   (b) Dla każdego epimorfizmu $\varphi : N \to M$ istnieje homomorfizm $\psi : M \to N$ taki, że $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}_M$.

2. Udowodnić, że każdy moduł projektywny jest płaski.

3. Załóżmy, że $S \subset R$ jest podzbiorem multyplikatywnym i M, N są R_S modułami. Udowodnić, że:
   (a) $M \otimes_R N$ ma jedyną strukturę R_S-modułu taką, że naturalne odwzorowania $M, N \to M \otimes_R N$ są R_S-liniowe.
   (b) $M \otimes_R N \cong_{R_S} M \otimes_{R_S} N$.

4. Załóżmy, że $S \subset R$ jest podzbiorem multyplikatywnym. Udowodnić, że
$$M_S \cong_{R_S} M \otimes_R R_S,$$
$$(M \otimes_R N)_S \cong_{R_S} M_S \otimes_{R_S} N_S.$$

5. Załóżmy, że R jest pierścieniem lokalnym i M jest skończenie generowanym modułem projektywnym. Udowodnić, że M jest wolny. Założenie, że M jest skończenie generowany można opuścić (Kaplanski), ale dowód jest wtedy trudniejszy.

6. Udowodnić, że jeśli M jest wolny i odwracalny, to $M \cong_R R$.

7. Załóżmy, że M jest odwracalny. Udowodnić, że kanoniczne odwzorowanie
$$M \otimes_R \mathrm{Hom}_R(M, R) \ni m \otimes \varphi \mapsto \varphi(m) \in R$$
jest izomorfizmem R-modułów.

8. Załóżmy, że $f : M \to N$ jest homomorfizmem R-modułów takim, że dla każdego $P \in \mathrm{Max}(R)$ odwzorowanie $f_P : M_P \to N_P$ jest izomorfizmem. Udowodnić, że f jest izomorfizmem.

9. Udowodnić, że jeśli M jest lokalnie wolny rangi 1, to M jest odwracalny.