Pierścienie Dedekinda, Lista 2

Niech K będzie ciałem i R pierścieniem.

1. Niech P będzie ideałem pierwszym w R. Udowodnić, że (izomorfizm R-algebr)
$$R_P/PR_P \cong_R (R/P)_0.$$

2. Niech R będzie pierścieniem waluacyjnym, K jego ciałem ułamków, A grupa ilorazową K^*/R^* oraz $v : K^* \to A$ homomorfizmem ilorazowym. Udowodnić, że:

   (a) Relacja $\leqslant$ na A zdefiniowana poprzez
   $$a \leqslant b \iff (\exists x, y \in K^*)(yx^{-1} \in R \ \wedge \ v(x) = a \ \wedge \ v(y) = b)$$
   jest porządkiem liniowym.

   (b) Para $(A, \leqslant)$ jest grupą uporządkowaną.

   (c) Funkcja $v : K^* \to A$ jest waluacją.

   (d) Mamy $R = R_v$.

3. Udowodnić, że pierścień $K[\![X^{\mathbb{Q}}]\!]$ (pierścień standardowej waluacji na $K((X^{\mathbb{Q}}))$) nie jest noetherowski.