Pierścienie Dedekinda, Lista 3

Niech K będzie ciałem i R pierścieniem.

1. Udowodnić, że jeśli pierścień R jest lokalny, to pierścień $R[\![X]\!]$ jest również lokalny.
2. Dla jakich pierścieni R, pierścień $R[\![X]\!]$ jest waluacyjny?
3. Porównać pierścienie $K[\![X, Y]\!]$ i $K[\![X^{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}]\!]$.
4. Udowodnić, że pierścień z jednoznacznym rozkładem jest normalny.
5. Udowodnić, że pierścień waluacyjny jest normalny.
6. Załóżmy, że R jest dziedziną. Udowodnić, że R jest normalny wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego ideału pierwszego $P \subset R$ pierścień R_P jest normalny.
7. Niech $R := \mathbb{C}[X^2, X^3]$.
   (a) Udowodnić, że R nie jest normalny.
   (b) Znaleźć $t \in \mathbb{C}(X)$ taki, że $\mathbb{C}[t]$ jest normalizacją R.
   (c) Zastanowić się nad interpretacją geometryczną (b).
8. Niech K będzie ciałem, $\mathrm{char}(K) \neq 2$ i $f \in K[X]\backslash K$ będzie niepodzielny przez kwadrat żadnego wielomianu dodatniego stopnia. Udowodnić, że $K[X, \sqrt{f}]$ jest całkowitym domknięciem $K[X]$ w $K(X, \sqrt{f})$.
9. Niech $d \in \mathbb{Z}$ będzie niepodzielna przez kwadrat żadnej liczby pierwszej. Udowodnić, że całkowitym domknięciem $\mathbb{Z}$ w $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ jest:
   (a) $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$, jeśli $d \equiv 3 \pmod 4$;
   (b) $\mathbb{Z}[\frac{1+\sqrt{d}}{2}]$, jeśli $d \equiv 1 \pmod 4$.