Pierścienie Dedekinda, Lista 4

Niech $K \subseteq L$ będzie rozszerzeniem ciał, R będzie pierścieniem i $n \in \mathbb{N}$.

1. Niech $K = R_0$ i załóżmy, że $\alpha \in L$ jest algebraiczny nad K. Udowodnić, że istnieje $r \in R \setminus \{0\}$ taki, że $r\alpha$ jest całkowity nad R.

2. Załóżmy, że rozszerzenie $K \subseteq L$ jest skończone i $\alpha \in L$. Udowodnić, że:

   (a) Jeśli $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K^{\text{alg}}$ są takie, że $(X - \alpha_1) \cdot \ldots \cdot (X - \alpha_n)$ jest wielomianem minimalnym α nad K oraz $L = K(\alpha)$, to mamy
   $$\mathrm{Tr}_{L/K}(\alpha) = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n.$$

   (b) Jeśli rozszerzenie $K \subseteq L$ nie jest rozdzielcze, to $\mathrm{Tr}_{L/K}(\alpha) = 0$.

   (c) Jeśli rozszerzenie $K \subseteq L$ jest rozdzielcze, to
   $$\mathrm{Tr}_{L/K}(\alpha) = \sum_{\sigma : L \xrightarrow[K]{} K^{\text{alg}}} \sigma(\alpha).$$

   (d) Jeśli $L \subseteq M$ jest skończonym rozszerzeniem ciał i $\beta \in M$, to
   $$\mathrm{Tr}_{L/K}(\mathrm{Tr}_{M/L}(\beta)) = \mathrm{Tr}_{M/K}(\beta).$$

3. (Twierdzenie Artina) Niech G będzie grupą oraz
   $$\chi_1, \ldots, \chi_n : G \to L^*$$
   homomorfizmami, które są parami różne. Udowodnić, że $\chi_1, \ldots, \chi_n$ są L-liniowo niezależne jako elementy przestrzeni funkcji z G w L.

4. Niech M' będzie R-podmodułem R-modułu M. Udowodnić, że:
   $$M \text{ jest noetherowski} \quad \Longleftrightarrow \quad M' \text{ i } M/M' \text{ są noetherowskie.}$$

5. Niech M będzie R-modułem noetherowskim oraz
   $$\mathrm{Ann}(M) := \{r \in R \mid rM = 0\}.$$
   Udowodnić, że $R/\mathrm{Ann}(M)$ jest pierścieniem noetherowskim.

6. Niech M będzie modułem noetherowskim i $f : M \to M$ epimorfizmem. Udowodnić, że f jest izomorfizmem.