Pierścienie Dedekinda, Lista 5

Niech $K \subseteq L$ będzie rozszerzeniem ciał i R będzie pierścieniem.

1. Załóżmy, że $K \subseteq L$ jest rozdzielcze i $\alpha \in L$. Udowodnić, że
$$\mathrm{N}_{L/K}(\alpha) = \prod_{\sigma : L \xrightarrow[K]{} K^{\mathrm{alg}}} \sigma(\alpha).$$

2. Niech K będzie ciałem liczbowym, R całkowitym domknięciem $\mathbb{Z}$ w K i $r \in R$. Udowodnić, że $r \in R^*$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathrm{N}_{K/\mathbb{Q}}(r) = \pm 1$.

3. Niech p będzie liczbą pierwszą, $\zeta_p = e^{2\pi i/p}$ i $\mathcal{O}$ całkowitym domknięciem $\mathbb{Z}$ w $\mathbb{Q}(\zeta_p)$. Udowodnić, że
   (a) $\mathrm{N}_{\mathbb{Q}(\zeta_p)/\mathbb{Q}}(\zeta_p) = 1$.
   (b) Dla $i \in \{1, \ldots, p-1\}$ mamy $\mathrm{Tr}_{\mathbb{Q}(\zeta_p)/\mathbb{Q}}(\zeta_p^i) = -1$.
   (c) $p = (1-\zeta_p)\cdots(1-\zeta_p^{p-1})$.
   (d) $\mathrm{N}_{\mathbb{Q}(\zeta_p)/\mathbb{Q}}(1-\zeta_p) = p$.
   (e) $(1-\zeta_p)\mathcal{O} \cap \mathbb{Z} = p\mathbb{Z}$.
   (f) Dla każdego $\alpha \in \mathcal{O}$ mamy
   $$\mathrm{Tr}_{\mathbb{Q}(\zeta_p)/\mathbb{Q}}(\alpha(1-\zeta_p)) \in p\mathbb{Z}.$$
   (g) Dla każdych $a_0, a_1, \ldots, a_{p-2} \in \mathbb{Q}$ mamy
   $$\mathrm{Tr}_{\mathbb{Q}(\zeta_p)/\mathbb{Q}}((a_0 + a_1\zeta_p + \ldots + a_{p-2}\zeta_p^{p-2})(1-\zeta_p)) = pa_0.$$
   (h) $\mathcal{O} = \mathbb{Z}[\zeta_p]$.

4. Niech R będzie dziedziną i I będzie R-podmodułem R_0. Udowodnić, że:
   (a) Jeśli I jest odwracalny, to I jest skończenie generowany.
   (b) Jeśli I jest skończenie generowany, to I jest ułamkowy.
   (c) Jeśli I jest ułamkowy i R jest noetherowski, to I jest skończenie generowany.

5. Załóżmy, że R jest pierścieniem noetherowskim i I jest właściwym ideałem R. Udowodnić, że istnieją ideały pierwsze $P_1, \ldots, P_n$ w R takie, że dla każdego $i \leqslant n$ mamy
$$P_1 \cdot \ldots \cdot P_n \subseteq I \subseteq P_i.$$