Pierścienie Dedekinda, Lista 6

Niech R będzie pierścieniem.

1. Niech $I \lhd R$. Udowodnić, że następujące warunki są równoważne:
   (a) Ideał I jest prymarny.
   (b) W pierścieniu R/I każdy dzielnik zera jest elementem nilpotentnym.

2. Niech P będzie ideałem pierwszym R i $n \in \mathbb{N}_{>0}$. Udowodnić, że
$$\sqrt{P^n} = P.$$

3. Niech I, J będą różnymi ideałami maksymalnymi R i $n, m \in \mathbb{N}$. Udowodnić, że
$$I^n + J^m = R.$$

4. Udowodnić, że jeśli $I \lhd R$ jest prymarny, to $\sqrt{I}$ jest pierwszy.

5. Niech $I \lhd R$ i załóżmy, że $\sqrt{I} \in \mathrm{Max}(R)$. Udowodnić, że ideał I jest prymarny.

6. Podać przykład R i $I \lhd R$, takiego że $\sqrt{I} \in \mathrm{Max}(R)$ oraz że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ mamy $I \neq (\sqrt{I})^n$.

7. Podać przykład R i ideału prymarnego, który nie jest potęgą żadnego ideału pierwszego.

8. Podać przykład R i ideału pierwszego P w R i $n \in \mathbb{N}_{>0}$, takich że P^n nie jest ideałem prymarnym.

9. Niech R będzie pierścieniem Dedekinda i $I \lhd R$. Udowodnić, że I jest ideałem prymarnym wtedy i tylko wtedy, gdy I jest potęgą ideału pierwszego.

10. Niech R będzie pierścieniem Dedekinda i $S \subseteq R$ podzbiorem multyplikatywnym. Udowodnić, że R_S jest pierścieniem Dedekinda lub ciałem.

11. Udowodnić, że każdy właściwy podpierścień $\mathbb{Q}$ jest pierścieniem Dedekinda.