Pierścienie Dedekinda, Lista 7

Niech R i T będą pierścieniami.

1. Załóżmy, że R jest pierścieniem Dedekinda i dla każdego niezerowego ideału I i każdego $P \in \mathrm{Max}(R)$ niech $n_P(I) \in \mathbb{N}$ będzie takie, że

$$I = \prod_{P \in \mathrm{Max}(R)} P^{n_P(I)}.$$

   Udowodnić, że dla niezerowych ideałów I, J pierścienia R mamy:

   (a) Dla każdego $P \in \mathrm{Max}(R)$, $n_P(IJ) = n_P(I) + n_P(J)$.

   (b) $I \subseteq J \iff$ dla każdego $P \in \mathrm{Max}(R)$, $n_P(I) \geqslant n_P(J)$.

   (c) Dla każdego $P \in \mathrm{Max}(R)$, $n_P(I + J) = \min\{n_P(I), n_P(J)\}$.

   (d) Dla każdego $P \in \mathrm{Max}(R)$, $n_P(I \cap J) = \max\{n_P(I), n_P(J)\}$.

2. Udowodnić, że jeśli R i T są pierścieniami ideałów głównych, to $R \times T$ jest pierścieniem ideałów głównych.

3. Załóżmy, że R jest DVR i niech $K = R_0$. Udowodnić, że R jest maksymalnym właściwym podpierścieniem K.

4. Niech $\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(R)$ i $n \in \mathbb{N}_{>0}$. Udowodnić, że

$$R/\mathfrak{m}^n \cong R_\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^n R_\mathfrak{m}.$$

5. Podać przykład R, ideału $P \in \mathrm{Spec}(R)$ i $n \in \mathbb{N}_{>0}$ takiego, że

$$P^n \neq (P^n R_P) \cap R.$$

   Ideał $(P^n R_P) \cap R$ oznaczamy $P^{(n)}$ i nazywamy *n-tą potęgą symboliczną* P. Udowodnić, że zawsze potęga symboliczna ideału pierwszego jest ideałem prymarnym.

6. Niech R będzie pierścieniem Dedekinda. Udowodnić, że grupa ideałów ułamkowych R jest wolną grupą abelową o bazie $\mathrm{Max}(R)$.

7. Niech R będzie dziedziną, $K = R_0$ i M, N będą R-podmodułami K. Udowodnić, że $M \cong N$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje $\alpha \in K \setminus \{0\}$ taki, że $N = \alpha M$.