Pierścienie Dedekinda, Lista 8

1. Niech $I_1, \ldots, I_k$ będą ideałami pierścienia R. Udowodnić, że:

$$\sqrt{I_1 \cdot \ldots \cdot I_k} = \sqrt{I_1 \cap \ldots \cap I_k} = \sqrt{I_1} \cap \ldots \cap \sqrt{I_k}.$$

2. Niech $\varepsilon \in \mathbb{C}$ będzie taki, że $\varepsilon^2 = -5$ i $R = \mathbb{Z}[\varepsilon]$. Udowodnić, że

   (a) R jest pierścieniem Dedekinda.

   (b) Liczby $3, 7, 1+2\varepsilon, 1-2\varepsilon, 4+\varepsilon, 4-\varepsilon$ są elementami nierozkładalnymi pierścienia R (można użyć normy).

   (c) Znaleźć 3 niestowarzyszone rozkłady liczby 21 w R na iloczyny elementów nierozkładalnych.

   (d) Udowodnić, że następujące ideały pierścienia R sa pierwsze:

   $$P_3 := (3, 1+\varepsilon), \quad P_3' := (3, 1-\varepsilon), \quad P_7 := (7, 3+\varepsilon), \quad P_7' := (7, 3-\varepsilon).$$

   (e) Rozłożyć ideał $(21) \lhd R$ na iloczyn ideałów pierwszych.

   (f) Używając rozkładu z (e) znaleźć ponownie rozkłady z (c).

3. Niech $R \subseteq T$ będzie rozszerzeniem pierścieni Dedekinda, $Q \in \mathrm{Max}(T)$, $P \in \mathrm{Max}(R)$ oraz $e := n_Q(PT)$. Udowodnić, że:

   (a) Następujące warunki są równoważne

      i. $P = Q \cap R$,

      ii. $e > 0$,

      iii. $P = Q^e \cap R$.

   (b) Jeśli $e > 0$, to dla każdego $x \in R \setminus \{0\}$ mamy

   $$v_Q(x) = v_P(x)e.$$

   (c) Jeśli $P = Q \cap R$ oraz $f := \dim_{R/P}(T/Q)$, to mamy

   $$\dim_{R/P}(T/Q^e) = ef.$$

4. Niech R będzie pierścieniem Dedekinda. Udowodnić, że następujące warunki są równoważne.

   (a) Grupa $\mathrm{Cl}(R)$ jest torsyjna.

   (b) Dla każdego pierścienia T, jeśli $R \subseteq T \subseteq R_0$, to istnieje podzbiór multyplikatywny $S \subseteq R$ taki, że $T = R_S$.