Pierścienie Dedekinda, Lista 9

Niech R będzie pierścieniem i $n \in \mathbb{N}_{>0}$.

1. Niech S będzie zbiorem multyplikatywnym w R oraz $\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(R)$ taki, że $\mathfrak{m} \cap S = \emptyset$. Udowodnić, że
$$R_S/\mathfrak{m}R_S \cong R/\mathfrak{m}.$$
Stąd w szczególności $\mathfrak{m}R_S \in \mathrm{Max}(R_S)$.

2. Niech $I_0, I_1, \ldots, I_n$ będą właściwymi ideałami w R, które są parami względnie pierwsze (tzn. $k \neq l$ implikuje $I_k + I_l = R$). Udowodnić, że
$$I_0 \nsubseteq I_1 \cup \ldots \cup I_n.$$

3. Niech V będzie przestrzenią liniową nad K wymiaru n, $\psi : V \times V \to V$ formą dwuliniową, $\bar{e}$ bazą V i $A \in \mathrm{GL}_n(K)$. Udowodnić, że
   (a) $D_{A(\bar{e})}(\psi) = \det(A)^2 D_{\bar{e}}(\psi)$.
   (b) Forma ψ jest niezdegenerowana wtedy i tylko wtedy, gdy mamy $D_{\bar{e}}(\psi) \neq 0$.

4. Niech $T_1, \ldots, T_n$ będą nadpierścieniami R, które są wolne i skończonej rangi jako R-moduły. Udowodnić, że
$$\mathrm{Disc}((T_1 \times \ldots \times T_n)/R) = \mathrm{Disc}(T_1/R) \cdot \ldots \cdot \mathrm{Disc}(T_n/R).$$

5. Udowodnić, że jeśli $K \subseteq L$ jest skończonym nierozdzielczym rozszerzeniem ciał, to $\mathrm{Disc}(L/K) = 0$.

6. Obliczyć wyróznik następujących ciał liczbowych:
   (a) Dla $d \in \mathbb{Z}$ bezkwadratowej, ciała $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$.
   (b) Dla liczby pierwszej p, ciała $\mathbb{Q}(e^{2\pi i/p})$.

7. Niech
$$\mathrm{Nil}(R) := \{r \in R \mid (\exists m \in \mathbb{N})(r^m = 0)\}.$$
Udowodnić, że $\mathrm{Nil}(R)$ jest przekrojem wszystkich ideałów pierwszych pierścienia R.

8. Załóżmy, że R jest dziedziną i że $M \in M_n(R)$. Udowodnić, że jeśli M jest nilpotentna, to $\mathrm{Tr}(M) = 0$.