Geometria Algebraiczna 2, Lista 1

Niech k będzie ciałem, R pierścieniem i $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ kategoriami.

1. Udowodnić, że zdefiniowana na wykładzie kolekcja funkcji
$$(f_V : V \to V^{**})_{V \in \mathrm{Mod}_k}$$
jest naturalnym przekształceniem zadającym równoważność kategorii skończenie wymiarowych przestrzeni liniowych nad k z kategorią do niej przeciwną.

2. Niech $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ będą funktorami i $\phi : F \to G$ naturalnym przekształceniem. Udowodnić, że ϕ jest izomorfizmem wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $A \in \mathcal{C}$ morfizm $\phi_A : F(A) \to G(A)$ jest izomorfizmem.

3. Udowodnić, że jeśli $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ jest wiernie pełnym funktorem takim, że dla każdego $B \in \mathcal{D}$ istnieje $A \in \mathcal{C}$ taki, że $F(A) \cong B$, to F zadaje równoważność $\mathcal{C}$ i $\mathcal{D}$.

4. Udowodnić Lemat Yonedy.

5. Udowodnić, że jeśli $F_A \to F$ i $F_{A'} \to F$ są granicami $F : I \to \mathcal{C}$, to istnieje izomorfizm $A \cong A'$ przemienny z naturalnymi przekształceniami $F_A \to F$ i $F_{A'} \to F$.

6. Zbadać istnienie koproduktów w kategorii zbiorów, grup, R-algebr, R-modułów i kategorii pochodzącej od posetu.

7. Udowodnić, że w Mod_R istnieją granice systemów prostych i odwrotnych.

8. Znaleźć presnopy stałe, które nie są snopami.

9. Udowodnić, że "snop wieżowiec" jest snopem.

10. Udowodnić, że usnopienie presnopa jest snopem.

11. Udowodnić, że usnopienie presnopa stałego jest izomorficzne ze snopem stałym (pochodzącym od tej samej grupy abelowej).

12. Niech $\mathcal{F}$ będzie presnopem. Udowodnić, że istnieje morfizm $\phi : \mathcal{F} \to \mathcal{F}^+$ taki, że:

    (a) Dla dowolnego snopa $\mathcal{G}$ i morfizmu $\psi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ istnieje jedyny morfizm $\alpha : \mathcal{F}^+ \to \mathcal{G}$ taki, że $\alpha \circ \phi = \psi$.

    (b) Jeśli $\mathcal{F}$ jest snopem, to ϕ jest izomorfizmem.