Geometria Algebraiczna 2, Lista 10

Niech A, B będą pierścieniami, $f : B \to A$ homomorfizmem, $M \in \mathrm{Mod}_A$ i $S \subseteq A$ zbiorem multyplikatywnym.

1. Udowodnić, że $M_S \cong_{R_S} M \otimes_R R_S$.

2. Niech X będzie separowalnym schematem nad A i $U, V \subseteq X$ będą otwartymi podschematami afinicznymi. Udowodnić, że $U \cap V$ jest afiniczny.

3. Znaleźć przykład schematu X i otwartych afinicznych podschematów $U, V \subseteq X$ takich, że $U \cap V$ nie jest afiniczny.

4. Udowodnić, że jeśli ciąg snopów $0 \to \mathcal{F}' \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}''$ jest dokładny, to ciąg grup przemiennych $0 \to \Gamma(\mathcal{F}') \to \Gamma(\mathcal{F}') \to \Gamma(\mathcal{F}'')$ jest dokładny.

5. Niech $X = \mathrm{Spec}(A)$ i $\iota : Y \to X$ będzie domkniętym włożeniem pochodzącym od $I \trianglelefteq A$. Udowodnić, że:

   (a) $\iota_*(\mathcal{O}_Y) = \widetilde{A/I}$,

   (b) $\mathrm{Supp}(\widetilde{A/I}) = D(I)(= \iota(Y))$,

   (c) $(D(I), (\widetilde{A/I})|_{D(I)})$ jest podschematem domkniętym X równoważnym $\iota : Y \to X$.

6. Udowodnić, że jeśli ciąg homomorfizmów R-modułów

   $$0 \to M_1 \to M_2 \to M_3 \to 0$$

   jest dokładny, to odpowiadający mu ciąg morfizmów snopów

   $$0 \to \widetilde{M_1} \to \widetilde{M_2} \to \widetilde{M_3} \to 0$$

   też jest dokładny.

7. Rozważmy kategorię $\mathcal{O}_X$-modułów, gdzie X jest schematem afinicznym. Udowodnić, że istnieje morfizm funktorów $\Phi : \tilde{} \circ \Gamma \to \mathrm{id}$ taki, że jeśli $\mathcal{F}$ jest quasi-koherentny, to $\Phi_{\mathcal{F}} : \widetilde{\Gamma(\mathcal{F})} \to \mathcal{F}$ jest izomorfizmem.

8. Udowodnić lemat o 5 izomorfizmach w kategorii grup przemiennych oraz w kategorii snopów.

9. Niech $\phi : \mathrm{Spec}(A) \to \mathrm{Spec}(B)$ pochodzi od f i f^*M to M ze strukturą B-modułu pochodzącą od f. Udowodnić, że $\phi_*(\widetilde{M}) = \widetilde{f^*M}$.

10. Znaleźć przykład morfizmu rozmaitości $f : X \to Y$ i snopu koherentnego $\mathcal{F}$ na X takiego, że $f_*(\mathcal{F})$ nie jest koherentny.