Geometria Algebraiczna 2, Lista 11

Niech $f : R \to S$ będzie homomorfizmem pierścieni z gradacją, M będzie R-modułem z gradacją, N będzie S-modułem z gradacją, $X = \mathrm{Proj}(R)$, $Y = \mathrm{Proj}(S)$ i $n \in \mathbb{Z}$.

1. Załóżmy, że $R = R_0[R_1]$. Udowodnić, że:
   (a) $\mathcal{O}_X(n)$ jest odwracalny,
   (b) $\widetilde{M}(n) = \widetilde{M(n)}$.

2. Niech $U := \{P \in Y \mid f(R_+) \nsubseteq P\}$. Udowodnić, że:
   (a) U jest otwartym podzbiorem Y i f zadaje morfizm
   $$\mathrm{Proj}(f) : U \to X.$$
   (b) Jeśli f jest epimorfizmem, to $U = Y$ i $\mathrm{Proj}(f)$ jest domkniętą immersją.
   (c) $\mathrm{Proj}(f)_*(\widetilde{N}) \cong \widetilde{f^*(N)}$.
   (d) $\mathrm{Proj}(f)^*(\widetilde{M}) \cong \widetilde{M \otimes_R S}$.

3. Załóżmy, że $R_0 = S_0 = A$ (chodzi o gradację!). Definiujemy
   $$R \times S := \bigoplus_{d=0}^{\infty} R_d \otimes_A S_d.$$
   Udowodnić, że:
   (a) $R \times S$ jest A-algebrą z gradacją.
   (b) $\mathrm{Proj}(R \times S) \cong_A X \times_A Y$.
   (c) $\mathbb{P}^n_A \cong_A \mathrm{Spec}(A) \times_{\mathbb{Z}} \mathbb{P}^n_{\mathbb{Z}}$.
   (d) $\mathcal{O}_{X \times_A Y}(1) \cong \pi_X^*(\mathcal{O}_X(1)) \otimes \pi_Y^*(\mathcal{O}_Y(1))$.

4. Znaleźć związek włożenia Segre'a z $R \times S$.

5. Udowodnić, że produkt tensorowy snopów bardzo szerokich jest snopem bardzo szerokim.

6. Załóżmy, że M jest skończenie generowany i R jest generowany jako R_0-algebra przez skończenie wiele elementów R_1. Udowodnić, że M_n jest skończenie generowanym S_0-modułem.

7. Niech schemat Z spełnia własność $(*)$ z wykładu i $D \subsetneq Z$ będzie domknięty. Udowodnić, że istnieje tylko skończenie wiele dywizorów pierwszych Z zawartych w D.