Geometria Algebraiczna 2, Lista 12

Niech k będzie ciałem i $d, n \in \mathbb{N}$.

1. Niech $f \in k[X_0 \ldots, X_n]_d$ będzie nierozkładalny. Udowodnić, że
$$\mathrm{Cl}(D_+(f)) \cong \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}.$$

2. Niech $Q := V_+(X_0X_1 - X_2X_3) \subseteq \mathbb{P}^3_k$. Udowodnić, że:
   (a) $Q \cong_k \mathbb{P}^1_k \times_k \mathbb{P}^1_k$.
   (b) Istnieje homomorfizm $\phi : \mathrm{Cl}(\mathbb{P}^3_k) \to \mathrm{Cl}(Q)$ taki, że dla każdego $D \in \mathrm{Div}(\mathbb{P}^3_k)$ jeśli $Q \nsubseteq \mathrm{supp}(D)$, to istnieje $D' \in \mathrm{Div}(Q)$ taki, że $\phi([D]) = [D']$ oraz $\mathrm{supp}(D') = \mathrm{supp}(D) \cap Q$.
   (c) $\phi([V_+(X_3)])$ jest typu $(1, 1)$ w $\mathrm{Cl}(Q)$.

3. Niech $Y := V_+(X_1X_2 - X_3^2) \subseteq \mathbb{P}^3_k$, $L := V_+(X_1, X_3) \subseteq \mathbb{P}^3_k$ i C będzie domkniętym podschematem $\mathbb{P}^3_k$ pochodzącym od homomorfizmu
$$k[X_0, X_1, X_2, X_3] \to k[Y_0, Y_1], \ \ X_0 \mapsto Y_0^3, X_1 \mapsto Y_1^3, X_2 \mapsto Y_0^2Y_1, X_3 \mapsto Y_0Y_1^2.$$
   Udowodnić, że (niektóre oznaczenia z zad. 2.):
   (a) $Y \cap Q = C \cup L$.
   (b) $\phi([Y])$ jest typu $(2, 2)$ i $[C]$ jest typu $(1, 2)$, jeśli C rozważamy jako dywizor na Q.
   (c) Nie istnieje $Y' \subseteq \mathbb{P}^3_k$ domknięty podschemat wymiaru 2 taki, że $Y' \cap Q = C$.

4. Załóżmy, że $\mathrm{char}(k) \neq 2$. Niech $f \in k[X_1, \ldots, X_n]$ będzie *bezkwadratowy* (tzn. niepodzielny przez kwadrat żadnego wielomianu nierozkładalnego), $A := k[X_1, \ldots, X_n, Y]/(Y^2 - f)$ i $K = A_0$. Udowodnić, że:
   (a) Homomorfizm ilorazowy $k[X_1, \ldots, X_n] \to A$ daje rozszerzerzenie ciał $k(X_1, \ldots, X_n) \subseteq K$ stopnia 2.
   (b) Powyższe rozszerzenie jest Galois o grupie Galois generowanej przez $y \mapsto -y$, gdzie $y := Y + (Y^2 - f)$.
   (c) Dla każdego $g, h \in k(X_1, \ldots, X_n)$ minimalnym wielomianem elementu $g + hy$ nad $k(X_1, \ldots, X_n)$ jest $X^2 - 2gX + (g^2 - h^2f)$.
   (d) Dla g, h jak wyżej, $g + hy$ jest całkowity nad $k[X_1, \ldots, X_n]$ wtedy i tylko wtedy, gdy $g, h \in k[X_1, \ldots, X_n]$.
   (e) A jest całkowitym domknięciem $k[X_1, \ldots, X_n]$ w K (w szczególności A jest normalny).

5. Udowodnić, że $\mathrm{CaCl}(\mathrm{Spec}(k[X, Y, Z]/(XY - Z^2))) = \{0\}$.