Geometria Algebraiczna 2, Lista 2

Niech X, Y będą przestrzeniami topologicznymi, $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in \mathrm{Ab}(X)$ i $\phi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$.

1. Dla $s \in \mathcal{F}(X)$, udowodnić że $s = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $x \in X$ mamy $s_x = 0$.

2. Udowodnić, że podpresnop $\ker(\phi) \leqslant \mathcal{F}$ jest snopem.

3. Niech $\mathcal{H}$ będzie podpresnopem $\mathcal{G}$ takim, że dla otwartego $U \subseteq X$ mamy $\mathcal{H}(U) = \phi_U(U)$. Udowodnić, że uniwersalny morfizm $\mathcal{H}^+ \to \mathcal{G}$ jest monomorfizmem.

4. Udowodnić, że następujące warunki są równoważne:

   (a) ϕ jest monomorfizmem,
   (b) dla każdego $x \in X$, $\phi_x : \mathcal{F}_x \to \mathcal{G}_x$ jest monomorfizmem,
   (c) dla każdego otwartego U, ϕ_U jest monomorfizmem.

5. Udowodnić, że następujące warunki są równoważne:

   (a) ϕ jest epimorfizmem,
   (b) dla każdego $x \in X$, $\phi_x : \mathcal{F}_x \to \mathcal{G}_x$ jest epimorfizmem.

6. Udowodnić, że ϕ jest izomorfizmem, wtedy i tylko wtedy gdy ϕ jest epimorfizmem i monomorfizmem.

7. Niech $(R, \mathfrak{m}_R), (S, \mathfrak{m}_S)$ będą pierścieniami lokalnymi i $f : R \to S$ homomorfizmem. Udowodnić, że:

   (a) f jest lokalny wtedy i tylko wtedy, gdy $f(\mathfrak{m}_R) \subseteq \mathfrak{m}_S$,
   (b) istnieje lokalny f taki, że $f(\mathfrak{m}_R) \neq \mathfrak{m}_S$.

8. Niech $\mathcal{R} \leqslant C_X, \mathcal{T} \leqslant C_Y$ będa podsnopami PLO $\mathbb{R}$-algebr i
$$(f, f^\sharp) : (X, \mathcal{R}) \to (Y, \mathcal{T})$$
   będzie morfizmem PLO $\mathbb{R}$-algebr. Udowodnić, że $f^\sharp$ jest cofaniem funkcji przez f.

9. Załóżmy, że M, N są rozmaitościami różniczkowymi i
$$(f, f^\sharp) : (M, C^\infty_M) \to (N, C^\infty_N)$$
   jest morfizmem PLO $\mathbb{R}$-algebr. Udowodnić, że f jest gładka.

10. Sformułować i udowodnić twierdzenia analogiczne do 9. powyżej dla kategorii $\mathbf{Var}_k$ i $\mathbf{An}$, gdzie k jest ciałem algebraicznie domkniętym.