Geometria Algebraiczna 2, Lista 3

Niech R, S będą pierścieniami, $I, J, (I_l)_l$ ideałami w R, $\mathcal{O}$ snopem strukturalnym R, $P \in \operatorname{Spec}(R)$, $r, s \in R$ i $\phi : R \to S$ homomorfizmem.

1. Udowodnić, że przestrzeń topologiczna jest noetherowska wtedy i tylko wtedy, gdy każdy jej otwarty podzbiór jest quasi-zwarty.
2. Udowodnić, że $\sqrt{I} = \bigcap V(I)$.
3. Udowodnić, że:
   (a) $V(IJ) = V(I \cap J) = V(I) \cup V(J)$,
   (b) $V(\sum_l I_l) = \bigcap_l V(I_l)$,
   (c) $V(I) \subseteq V(J) \Leftrightarrow \sqrt{I} \supseteq \sqrt{J}$,
   (d) rodzina $D(r)_{r \in R}$ jest bazą $\operatorname{Spec}(R)$,
   (e) $\operatorname{Spec}(R)$ jest quasi-zwarta,
   (f) $\phi^* : \operatorname{Spec}(S) \to \operatorname{Spec}(R)$ jest ciągła.
4. Udowodnić, że dla $r \in R \setminus \sqrt{(0)}$ mamy
$$(\operatorname{Spec}(R_r), \mathcal{O}_{R_r}) \cong (D(r), \mathcal{O}|_{D(r)}).$$
5. Rozważmy $X := R \setminus \sqrt{(0)}$ jako zbiór skierowany z relacją podzielności. Udowodnić, że:
   (a) systemy proste $(\mathcal{O}(D(r))_{r \in X}$ i $(R_r)_{r \in X}$ są izomorficzne,
   (b) $R_P \cong \varinjlim (R_r)_{r \notin P}$,
   (c) $\mathcal{O}_P \cong R_P$.
6. Znaleźć morfizm przestrzeni opierścienionych $(S, \operatorname{Spec}(S)) \to (R, \operatorname{Spec}(R))$, który nie pochodzi od żadnego homomorfizmu $R \to S$.
7. Niech $(X, \mathcal{O}_X)$ będzie schematem i U podzbiorem otwartym X. Udowodnić, że $(U, \mathcal{O}_X|_U)$ jest schematem.