Geometria Algebraiczna 2, Lista 4

Niech k będzie ciałem algebraicznie domkniętym.

1. Niech $(X_i)_{i\in I}$ będzie rodziną schematów i dla $i \neq j$ niech $U_{ij} \subseteq X_i$ będzie podzbiorem otwartym z indukowaną strukturą schematu. Załóżmy, że mamy izomorfizmy $\phi_{ij} : U_{ij} \to U_{ji}$ takie, że $\phi_{ij} = \phi_{ji}^{-1}$ oraz $\phi_{ij}(U_{ij} \cap U_{ik}) = U_{ji} \cap U_{jk}$ oraz $\phi_{ik} = \phi_{jk} \circ \phi_{ij}$ na $U_{ij} \cap U_{ik}$. Udowodnić, że istnieje schemat X i morfizmy $\psi_i : X_i \to X$ takie, że:
   (a) $\psi_i(X_i)$ jest otwarty w X i $\psi_i : X_i \to \psi_i(X_i)$ jest izomorfizmem,
   (b) $X = \bigcup \psi_i(X_i)$,
   (c) $\psi_i(U_{ij}) = \psi_i(X_i) \cap \psi_j(X_j)$,
   (d) $\psi_i = \psi_j \circ \phi_{ij}$.

   Mówimy, że X jest *sklejeniem* (X_i) *wzdłuż* (ϕ_{ij}).

2. Niech X będzie przestrzenią topologiczną. Udowodnić, że funkcja
$$\alpha : X \to t(X), \quad \alpha(x) = \mathrm{cl}(\{x\})$$
   jest ciągła i indukuje bijekcję pomiędzy zbiorami otwartymi X i $t(X)$.

3. Niech S będzie pierścieniem z gradacją i $I \trianglelefteq S$. Udowodnić, że:
   (a) I jest jednorodny wtedy i tylko wtedy, gdy I ma zbiór jednorodnych generatorów.
   (b) Operacje sumy, iloczynu, przekroju i radykału zachowują ideały jednorodne.
   (c) Rodzina $(D_+(f))_{f\in S_+, f:\text{jednorodny}}$ jest bazą $\mathrm{Proj}(S)$.
   (d) Jeśli I jest jednorodny i dla każdych jednorodnych $r, s \in S$ mamy $rs \in I \Rightarrow r \in I \vee s \in I$, to I jest pierwszy.
   (e) $\mathrm{Proj}(S) = \emptyset$ wtedy i tylko wtedy, gdy każdy element S_+ jest nilpotentny.

4. Niech V będzie rozmaitością rzutową nad k i S jednorodnym pierścieniem V. Udowodnić, że schemat $t(V)$ jest izomorficzny z $\mathrm{Proj}(S)$ w kategorii $\mathbf{Sch}_k$.

5. Udowodnić, że zdefiniowany na wykładzie funktor $\mathbf{Var}_k \to \mathbf{Sch}_k$ jest wiernie pełny.

6. Niech X będzie schematem. Udowodnić, że:
   (a) $(X, (\mathcal{O}_X)_{\mathrm{red}})$ jest schematem zredukowanym,
   (b) X jest zredukowany wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $x \in X$ pierścień $\mathcal{O}_x$ jest zredukowany.