Geometria Algebraiczna 2, Lista 5

Niech X, Y będą schematami, $f : X \to Y$ morfizmem, R, S pierścieniami i K ciałem.

1. Dla $f \in \mathcal{O}_X(X)$ niech $D := \{x \in X \mid f_x \in \mathfrak{m}_x\}$. Udowodnić, że D jest domknięty.

2. Niech $D \subseteq X$ będzie domknięty i nierozkładalny. Udowodnić, że D ma jedyny punkt generic.

3. Udowodnić, że:

   (a) jeśli X jest noetherowski, to $\mathrm{sp}(X)$ jest noetherowska,

   (b) istnieje R taki, że $\mathrm{sp}(\mathrm{Spec}(R))$ jest noetherowska ale R nie jest noetherowski.

4. Udowodnić, że konstrukcja z wykładu zadaje bijekcję

   $$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Sch}}(\mathrm{Spec}(K), X) \leftrightarrow \{(x, \phi) | x \in X, \phi : k(x) \to K \text{ jest homom.}\}.$$

5. Załóżmy, że $X, Y \in \mathbf{Sch}_K$ i że f jest morfizmem nad K. Udowodnić, że:

   (a) $f(X(K)) \subseteq Y(K)$,

   (b) jeśli $x \in X(K)$, to x jest domknięty,

   (c) jeśli K jest algebraicznie domknięte i dla pewnej $V \in \mathbf{Var}_K$ mamy $X = t(V)$, to $X(K)$ jest zbiorem punktów domkniętych X, czyli $X(K)$ jest w bijekcji z V.