Geometria Algebraiczna 2, Lista 7

Niech $f : X \to Z, g : Y \to Z$ będą morfizmami schematów i A będzie pierścieniem.

1. Niech $U_X \subseteq X, U_Y \subseteq Y, U \subseteq Z$ będą otwarte. Udowodnić, że:

   (a) Jeśli $f(X) \subseteq U$, to istnieje jedyny morfizm $f_U : X \to U$ taki, że $f = \iota_U \circ f_U$, gdzie $\iota_U : U \to Z$ jest morfizmem inkluzji.

   (b) Jeśli $\pi_1 : X \times_Z Y \to X$ jest rzutowaniem, to
   $$\pi_1^{-1}(U_X) \cong_Z U_X \times_Z Y.$$

   (c) Jeśli $f(U_X), g(U_Y) \subseteq U$, to
   $$U_X \times_U U_Y \cong_Z U_X \times_Z U_Y.$$

   (d) Jeśli f jest quasi-zwarty i U jest afiniczny, to $f^{-1}(U)$ jest quasi-zwarty.

2. Załóżmy, że X jest noetherowski. Udowodnić, że $\Delta_f : X \to X \times_Z X$ jest quasi-zwarty.

3. Załóżmy, że X jest całkowity i $\xi \in X$ jest punktem generic. Udowodnić, że:

   (a) $\mathcal{O}_{X,\xi}$ jest ciałem zwanym *ciałem funkcji wymiernych* X i oznaczanym przez $K(X)$.

   (b) Jeśli $U_X \neq \emptyset$, to homomorfizm
   $$\mathcal{O}(U_X) \ni s \mapsto s_\xi \in K(X)$$
   jest "1-1".

   (c) Jeśli $U_X \cong \mathrm{Spec}(A)$, to $K(X) \cong A_0$.

4. Załóżmy, że X, Z są całkowite, $\mathrm{cl}(f(X)) = Z$, f jest skończonego typu i generycznie skończony. Udowodnić, że:

   (a) f indukuje skończone rozszerzenie ciał $K(Z) \subseteq K(X)$.

   (b) Istnieje otwarty gęsty podzbiór $U \subseteq Z$ taki, że morfizm
   $$f|_{f^{-1}(U)} : f^{-1}(U) \to U$$
   jest skończony.