Geometria Algebraiczna 2, Lista 8

Niech X będzie schematem i A będzie pierścieniem.

1. Załóżmy, że $D \subseteq X$ jest domknięty. Udowodnić, że:

   (a) Istnieje na D struktura domkniętego podschematu taka, że dla każdego otwartego podschematu $U \subseteq X$, jeśli $U \cong \mathrm{Spec}(A)$, to struktura domkniętego podschematu na $U \cap D$ w U jest zadana przez ideał radykalny $I \trianglelefteq A$, taki że $U \cap D$ odpowiada $V(I)$.

   (b) Jeśli $\phi : Y \to X$ zadaje strukturę domkniętego podschematu na D, to istnieje morfizm $\phi' : D \to Y$ (D ze strukturą podschematu z (i)) taki, że $\phi \circ \phi'$ jest domkniętym włożeniem $i_D : D \subseteq X$.

   (c) Dla każdego morfizmu $\phi : Z \to X$, jeśli Z jest zredukowany i $\phi(Z) \subseteq D$, to istnieje morfizm schematów $\phi' : Z \to D$ (D ze strukturą podschematu z (i)) taki, że $\phi = i_D \circ \phi'$.

2. Załóżmy, że $f : V \to W$ jest morfizmem w kategorii $\mathcal{C}$, w której istnieją produkty włókniste. Udowodnić, że dla dowolnego $T \in \mathcal{C}$ i dowolnego morfizmu $\phi : T \to V \times_W V$, jeśli $\pi_1 \circ \phi = \pi_2 \circ \phi =: \phi_V$, to $\phi = \Delta_f \circ \phi_V$.

3. Udowodnić, że złożenie separowalnych morfizmów jest separowalnym morfizmem.

4. Udowodnić, że produkt włóknisty separowalnych morfizmów jest separowalnym morfizmem.

5. Udowodnić, że separowalne morfizmy są stabilne względem rozszerzenia bazy.

6. Udowodnić, że domknięte i otwarte włożenia są monomorfizmami w kategorii schematów.

7. Udowodnić, że domknięte włożenia są morfizmami właściwymi.