GEOMETRIA ALGEBRAICZNA, Lista 10

Niech K będzie ciałem algebraicznie domkniętym i $m, n \in \mathbb{N}$.

1. Niech $F \in K[X, Y, Z]$ będzie wielomianem jednorodnym i
$$V := \{x \in \mathbb{P}^2 \mid F(x) = 0\}.$$
Udowodnić, że jeśli rzutowy zbiór algebraiczny V jest gładki (definicja gładkości z wykładu stosuje się do dowolnych rzutowych zbiorów algebraicznych), to V jest nierozkładalny.

2. Niech $F \in K[X, Y]$ oraz $V := V(F) \subseteq \mathbb{A}^2$. Czy jeśli afiniczny zbiór algebraiczny V jest gładki, to V jest nierozkładalny?

3. Niech V będzie rozmaitością quasi-afiniczną lub rozmaitością quasi-rzutową. Udowodnić, że jeśli $f : V \to K$ jest funkcją regularną, to f jest też funkcją ciągłą (w topologii Zariskiego).

4. Niech V będzie rozmaitością quasi-rzutową i $\mathcal{O}(V)$ zbiorem funkcji regularnych $V \to K$. Udowodnić, że $\mathcal{O}(V)$ jest K-podalgebrą K-algebry funkcji $\mathrm{Fun}(V, K)$.

5. Niech V będzie rozmaitością quasi-rzutową oraz W będzie nierozkładalnym lokalnie domkniętym podzbiorem V (tzn. W jest przekrojem otwartego podzbioru V z podzbiorem domkniętym V). Udowodnić, że:
   (a) W jest rozmaitością quasi-rzutową;
   (b) podobna konkluzja jak w (a) powyżej zachodzi dla rozmaitości quasi-afinicznych;
   (c) funkcja inkluzji $W \to V$ jest funkcją regularną.

6. Udowodnić, że rozmaitość quasi-afiniczna $\mathbb{A}^2 \setminus \{0\}$ nie jest (izomorficzna z) rozmaitością afiniczną.

7. Niech $V \subseteq \mathbb{A}^n$ i $W \subseteq \mathbb{A}^m$ będą rozmaitościami afinicznymi. Udowodnić, że:
   (a) $V \times W \subseteq \mathbb{A}^{n+m}$ jest rozmaitością afiniczną;
   (b) $K[V \times W] \cong_K K[V] \otimes_K K[W]$.

8. Niech:
$$\alpha : \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m \to \mathbb{P}^{nm+n+m},$$
$$\alpha\left([x_0 : \ldots : x_n], [y_0 : \ldots : y_m]\right) = [x_0 y_0 : \ldots : x_n y_0 : \ldots \ \ldots : x_0 y_m : \ldots : x_n y_m]$$
(*zanurzenie Segre'a*). Udowodnić, że:
   (a) funkcja α jest dobrze określona i różnowartościowa;
   (b) dla dowolnych rozmaitości rzutowych $V \subseteq \mathbb{P}^n$ i $W \subseteq \mathbb{P}^m$, mamy że $\alpha(V \times W)$ jest też rozmaitością rzutową.

   (Utożsamiając $V \times W$ z $\alpha(V \times W)$ możemy teraz traktować $V \times W$ jako rozmaitością rzutową.)

9. Niech:
$$V = \{[a : b : c : d] \in \mathbb{P}^3 \mid ab - cd = 0\}.$$
Udowodnić, że $V \cong \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$.

10. Zrozumieć definicję produktu w kategorii i udowodnić, że w kategorii rozmaitości quasi-rzutowych istnieją produkty (podobnie w kategoriach rozmaitości: afinicznych, quasi-afinicznych oraz rzutowych).

11. Niech V będzie rozmaitością quasi-rzutową i $v \in V$. Udowodnić, że pierścień $\mathcal{O}_{v,V}$ (funkcji regularnych w punkcie v na rozmaitości V) jest lokalny i że mamy
$$\mathcal{O}_{v,V} / \mathfrak{m}_{v,V} \cong_K K.$$