GEOMETRIA ALGEBRAICZNA, Lista 11

Niech K będzie ciałem algebraicznie domkniętym i $m, n \in \mathbb{N}$.

1. Udowodnić, że dla każdego $i \in \{1, \ldots, n+1\}$, funkcja
$$\psi_i : \mathbb{A}^n \cong U_i$$
jest izomorfizmem.

2. Niech V będzie rozmaitością afiniczną i $f \in K[V]$. Udowodnić, że
$$K[V_f] \cong K[V]_f.$$

3. Udowodnić, że każda rozmaitość ma bazę otwartą składającą się z rozmaitości afinicznych.

4. Udowodnić, że $\mathrm{GL}_n(K)$ jest afiniczną grupą algebraiczną.

5. Niech V będzie właściwym lokalnie domkniętym podzbiorem $\mathbb{A}^1$ traktowanym jako rozmaitość quasi-afiniczna. Udowodnić, że $V \not\cong \mathbb{A}^1$.

6. Udowodnić, że (zakładając, że $\mathcal{O}(V) = K$ dla rozmaitości rzutowej V) jeśli rozmaitość jest rzutowa i quasi-afiniczna, to jest punktem.

7. Niech V, W będą rozmaitościami algebraicznymi i $\varphi : V \to W$ będzie morfizmem. Udowodnić, że:

   (a) φ jest izomorfizmem wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $v \in V$ homomorfizm lokalnych pierścieni
   $$\varphi^*_{v,V} : \mathcal{O}_{v,V} \to \mathcal{O}_{\varphi(v),W}$$
   jest izomorfizmem;

   (b) jeśli $\varphi(V)$ jest gęsty w W, to dla każdego $v \in V$ homomorfizm $\varphi^*_{v,V}$ jest monomorfizmem.

8. Niech $M_0, \ldots, M_N \in K[X_1, \ldots, X_{n+1}]$ będą wszystkimi unormowanymi jednomianami stopnia m. Niech
$$\rho_m : \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^N, \quad \rho_m(x) := [M_0(x) : \ldots : M_N(x)].$$
Udowodnić, że:

   (a) odwzorowanie ρ_m jest dobrze określone;

   (b) obraz ρ_m jest domkniętym i nierozkładalnym podzbiorem $\mathbb{P}^N$;

   (c) ρ_m jest izomorfizmem pomiędzy $\mathbb{P}^n$ a $\rho_m(\mathbb{P}^n)$.

9. Niech $F \in K[X_1, \ldots, X_{n+1}]$ będzie jednorodny stopnia m oraz
$$H := \{x \in \mathbb{P}^n \mid F(x) = 0\}.$$
Udowodnić, że rozmaitość $\mathbb{P}^n \setminus H$ jest afiniczna (wskazówka: użyć ρ_m z poprzedniego zadania).

10. Niech $v \in V$ będzie rozmaitością i $v \in V$. Znaleźć odwracającą inkluzje bijekcję pomiędzy:

    - domkniętym podzbiorami nierozkładalnymi w V zawierającymi v;
    - ideałami pierwszymi pierścienia $\mathcal{O}_{v,V}$.