

GEOMETRIA ALGEBRAICZNA, Lista 12 (na wykład 17. stycznia)

Niech K będzie ciałem algebraicznie domkniętym i C będzie gładką planarną krzywą rzutową daną przez wielomian jednorodny $T \in K[X, Y, Z]$. Niech $F, G \in K[X, Y, Z]$ będą jednorodne i takie, że każdy z nich ma skończenie wiele zer na krzywej C i że wszystkie te zera leżą na C_* .

1. Dla $x \in C_*$ powiemy, że *warunek Noethera jest spełniony dla C, F, G* , gdy:

$$F_* \in (T_*, G_*)K[X, Y]_{I(x)}.$$

Założmy, że powyższy warunek Noethera jest spełniony dla wszystkich $x \in C$, dla których też mamy $G(x) = 0$. Udowodnić, że:

(a) istnieją $a, b \in K[X, Y]$ takie, że $F_* = aT_* + bG_*$, wskazówka: skorzystać z udowodnionego na wykładzie faktu, że jeśli $I \triangleleft K[X, Y]$ i $V(I) = \{x_1, \dots, x_n\}$ jest skończony, to mamy:

$$K[X, Y]/I \cong_K K[X, Y]_{I(x_1)}/IK[X, Y]_{I(x_1)} \times \dots \times K[X, Y]_{I(x_n)}/IK[X, Y]_{I(x_n)};$$

(b) istnieją $r \in \mathbb{N}$ oraz $a', b' \in K[X, Y, Z]$ takie, że $Z^r F = a'T + b'G$ (wskazówka: skorzystać z zadania 8. Listy 8);

(c) istnieją $a'', b'' \in K[X, Y, Z]$ takie, że $F = a''T + b''G$ (wskazówka: skorzystać z tego, że pewna funkcja z dowodu twierdzenia Bezout była różnowartościowa);

(d) istnieją $A, B \in K[X, Y, Z]$ jednorodne i takie, że $F = AT + BG$ oraz

$$\deg(A) = \deg(F) - \deg(T), \quad \deg(B) = \deg(F) - \deg(G).$$

Podpunkt (d) to $AF + BG$ -*Twierdzenie Noethera* (u nas trochę inne oznaczenia).

2. Założmy, że:

$$I(x, C \cap F) \geq I(x, C \cap G).$$

Udowodnić, że warunek Noethera jest spełniony dla C, F, G oraz x .

3. Założmy, że $A \in K[X, Y, Z]$ jest wielomianem jednorodnym i $\deg(A) = \deg(G) - \deg(T)$. Udowodnić, że

$$T \cdot (G + AT) = T \cdot G.$$

4. Udowodnić, że jeśli dla każdego $x \in C$ mamy

$$I(x, C \cap F) \geq I(x, C \cap G),$$

to istnieje wielomian jednorodny $H \in K[X, Y, Z]$ taki, że

$$C \cdot F = C \cdot G + C \cdot H.$$