GEOMETRIA ALGEBRAICZNA, Lista 13

Niech K będzie ciałem algebraicznie domkniętym i $n \in \mathbb{N}_{>0}$.

1. Niech (G, μ) będzie afiniczną grupą algebraiczną.
   (a) Znaleźć i przedstawić definicję *algebry Hopfa* nad K.
   (b) Udowodnić, że $(K[G], \mu^*)$ jest algebrą Hopfa nad K, w szczególności opisać *antypodę* (antipode) i *koidentyczność* (counit) tej algebry Hopfa.
2. Opisać algebry Hopfa następujących grup algebraicznych:
   (a) grupa addytywa ciała K;
   (b) grupa multyplikatywna ciała K;
   (c) grupa $\mathrm{GL}_n(K)$.
3. Niech G będzie afiniczną grupą algebraiczną.
   (a) Znaleźć i przedstawić definicję *reprezentacji* (algebraicznej) G wymiaru n.
   (b) Udowodnić, że powyższe reprezentacje odpowiadają homomorfizmom grup algebraicznych $G \to \mathrm{GL}_n(K)$.
   (c) Znaleźć i przedstawić definicję (prawego) *komodułu* nad algebrą Hopfa $K[G]$.
   (d) Udowodnić, że powyższe reprezentacje odpowiadają komodułom nad $K[G]$, które są przestrzeniami liniowymi wymiaru n nad K.
   (e) Udowodnić, że każdy komoduł nad $K[G]$ jest sumą (teoriomnogościową) skończenie-wymiarowych (nad K) komodułów nad $K[G]$.
   (f) Udowodnić, że $K[G]$ jest komodułem nad $K[G]$.
   (g) Udowodnić, że G jest algebraiczną grupą liniową.