GEOMETRIA ALGEBRAICZNA, Lista 2

Niech K będzie ciałem algebraicznie domkniętym, V, W rozmaitościami afinicznymi i $n, m \in \mathbb{N}_{>0}$.

1. Następujące twierdzenie jest nazywane Lematem Zariskiego.

   Jeśli $F \subseteq L$ jest rozszerzeniem ciał i L jest skończenie generowaną F-algebrą, to $F \subseteq L$ jest skończonym rozszeniem ciał.

   Jak z Lematu Zariskiego wynika słabe twierdzenie Hilberta o zerach z wykładu?

2. Niech R będzie pierścieniem UFD i $a, b \in R$ będą takie, że $\mathrm{NWD}(a, b) = 1$. Udowodnić, że

$$R[X]/(aX + b) \cong_R R\,[b/a]\,.$$

3. Dla jakich $n \in \mathbb{N}$, wielomian $Y^2 - X^n \in K[X, Y]$ jest nierozkładalny?

4. Niech $W \subset \mathbb{A}^n$ będzie zbiorem skończonym mocy m.

   (a) Opisać $I(W)$ jako przekrój ideałów maksymalnych pierścienia $K[X_1, \ldots, X_n]$.

   (b) Korzystając z Chińskiego Twierdzenia o Resztach, udowodnić że

$$K[W] \cong_K K^m.$$

   (c) Wywnioskować, że $\mathrm{Fun}(W, K) = K[W]$.

   (d) Porównać powyższy dowód punktu (c) z dowodem z pierwszych ćwiczeń.

5. Udowodnić, że:

   (a) $V \times W$ jest afinicznym zbiorem algebraicznym;

   (b) zbiór

$$\Delta_V := \{(v, v) \in V \times V \mid v \in V\} \text{ (przekątna)}$$

   jest domknięty Zariskiego w $V \times V$;

   (c) jeśli $A \subseteq V$ jest gęsty Zariskiego, $F, G : V \to W$ są morfizmami i $F|_A = G|_A$, to $F = G$.

6. Morfizm $\Psi : V \to W$ nazywamy *monomorfizmem*, jeśli dla dowolnego afinicznego zbioru algebraicznego Z i dowolnych morfizmów $\Phi_1, \Phi_2 : Z \to V$, jeśli $\Phi_1 \neq \Phi_2$, to $\Psi \circ \Phi_1 \neq \Psi \circ \Phi_2$. Morfizm Ψ nazywamy *epimorfizmem*, jeśli dla dowolnego afinicznego zbioru algebraicznego Z i dowolnych morfizmów $\Phi_1, \Phi_2 : W \to Z$, jeśli $\Phi_1 \neq \Phi_2$, to $\Phi_1 \circ \Psi \neq \Phi_2 \circ \Psi$. (Pojęcia te mają sens w dowolnej kategorii.)
   Opisać monomorfizmy i epimorfizmy w kategorii afinicznych zbiorów algebraicznych.

7. Niech $V = V(Y^2 - X^3) \subset \mathbb{A}^2$ oraz

$$\Psi : \mathbb{A}^1 \to V, \quad \Psi(x) = \left(x^2, x^3\right).$$

   Udowodnić, że Ψ jest bijektywnym morfizmem, który nie jest izomorfizmem.

8. Niech I będzie ideałem w pierścieniu R. Udowodnić, że pierścień R/I jest zredukowany (tzn. nie ma elementów nilpotentnych) wtedy i tylko wtedy, gdy ideał I jest radykalny.