

GEOMETRIA ALGEBRAICZNA, Lista 3

Niech K będzie ciałem algebraicznie domkniętym i $k, n, m \in \mathbb{N}_{>0}$.

1. Załóżmy, że V jest rozmaitością algebraiczną i $f \in K(V)$. Udowodnić, że $\text{dom}(f)$ jest podzbiorem otwartym Zariskiego w V .
2. Dla maksymalnego idealu \mathfrak{m} w dziedzinie R , niech

$$R_{\mathfrak{m}} = \{a/b \in R_0 \mid a \in R, b \in R \setminus \mathfrak{m}\} \subseteq R_0.$$

Udowodnić, że

$$R = \bigcap \{R_{\mathfrak{m}} \mid \mathfrak{m} \text{ jest ideałem maksymalnym } R\}.$$

3. Niech T będzie dziedziną. Definiujemy:

$$\partial : T[X] \rightarrow T[X], \quad \partial(a_0 + a_1X + \dots + a_{n-1}X^{n-1} + a_nX^n) = a_1 + \dots + (n-1)a_{n-1}X^{n-2} + na_nX^{n-1}.$$

Udowodnić, że:

- (a) funkcja ∂ jest różniczkowaniem;
- (b) jeśli $\text{char}(T) = 0$, to $\partial^{-1}(0) = T$;
- (c) jeśli $\text{char}(T) = p > 0$, to $\partial^{-1}(0) = T[X^p]$.

4. Załóżmy, że:

- $G_1, \dots, G_k, F_1, \dots, F_m \in K[X_1, \dots, X_n]$;
- $G_1, \dots, G_k \in (F_1, \dots, F_m)$;
- $\bar{F} := (F_1, \dots, F_m)$, $\bar{G} := (G_1, \dots, G_k)$;
- $v \in V(\bar{F})$.

Udowodnić, że każdy wiersz macierzy $J_{\bar{G}}(v)$ jest K -liniową kombinacją wierszy macierzy $J_{\bar{F}}(v)$.

5. Niech $F_1, \dots, F_n \in K[X_1, \dots, X_n]$ i $\bar{F} : \mathbb{A}^n \rightarrow \mathbb{A}^n$ będzie morfizmem, gdzie $\bar{F} = (F_1, \dots, F_n)$.

- (a) Udowodnić, że jeśli \bar{F} jest izomorfizmem, to $\det(J_{\bar{F}}) \in K^*$.
- (b) Co sądzicie o implikacji przeciwnej do tej w punkcie (a)?

6. Załóżmy, że $K = \mathbb{C}$ i że $V \subseteq \mathbb{A}^n$ jest gładką rozmaitością algebraiczną. Udowodnić, że V jest zespoloną podrozmaitością \mathbb{C}^n (lub różniczkowalną podrozmaitością \mathbb{R}^{2n}). W szczególności, V jest też rozmaitością w sensie geometrii różniczkowej.

7. Niech P będzie ideałem pierwszym w pierścieniu R . Udowodnić, że:

- (a) $(R/P)_0 \cong_R R_P/PR_P$;
- (b) ilorazy P/P^2 oraz $PR_P/(PR_P)^2$ mają naturalne struktury R/P -modułów;
- (c) jeśli ideał P jest maksymalny, to mamy

$$P/P^2 \cong_{R/P} PR_P/(PR_P)^2.$$

8. Załóżmy, że $F, G \in K[X, Y]$ są nierozkładalne i że F nie dzieli G . Niech $V = V(FG) \subseteq \mathbb{A}^2$ oraz $a \in V$ będzie taki, że $F(a) = G(a) = 0$. Udowodnić, że a jest punktem osobliwym V .

9. Niech $F \in K[X, Y]$ i $V = V(F) \subseteq \mathbb{A}^2$. Udowodnić, że:

- (a) jeśli $F \notin K$, to V jest nieskończony;
- (b) jeśli $V(F, \frac{\partial F}{\partial X}, \frac{\partial F}{\partial Y})$ jest skończony, to $\sqrt{(F)} = (F)$ oraz $I(V) = (F)$;
- (c) jeśli $V(F, \frac{\partial F}{\partial X}, \frac{\partial F}{\partial Y}) = \emptyset$, to V jest gładką rozmaitością algebraiczną.

10. Załóżmy, że $\text{char}(K) \neq 2$. Dla poniższych $F \in K[X, Y]$, znaleźć punkty osobliwe $V(F)$ oraz dopasować krzywe $V(F)$ do poniższego obrazka.

- (a) $F = Y^4 + X^4 - X^2$.
- (b) $F = Y^6 + X^6 - XY$.
- (c) $F = Y^4 + X^4 + Y^2 - X^3$.
- (d) $F = Y^4 + X^4 - X^2Y - XY^2$.

