GEOMETRIA ALGEBRAICZNA, Lista 4

Niech K będzie ciałem algebraicznie domkniętym, $n \in \mathbb{N}_{>0}$ i $V \subseteq \mathbb{A}^n$ będzie rozmaitością algebraiczną.

1. Udowodnić, że istnieje jedyne różniczkowanie
$$\partial : K[X_1, \ldots, X_n] \to K[X_1, \ldots, X_n, X_1', \ldots, X_n']$$
takie, że dla $i \in \{1, \ldots, n\}$ mamy $\partial(X_i) = X_i'$ oraz $\partial(K) = \{0\}$.

2. Udowodnić, że dla ∂ z zadania 1. i $F \in K[X_1, \ldots, X_n]$ mamy:
$$\partial(F) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial X_i} X_i'.$$

3. Udowodnić, że jeśli $(F_1, \ldots, F_m) = (H_1, \ldots, H_k)$, to dla ∂ z zadania 1. mamy:
$$(F_1, \ldots, F_m, \partial(F_1), \ldots, \partial(F_m)) = (H_1, \ldots, H_k, \partial(H_1), \ldots, \partial(H_k)).$$

4. Udowodnić, że jeśli V jest gładka, to TV też jest gładka.

5. Niech $K = \mathbb{C}$ i załóżmy, że V jest gładka. Wtedy wiemy, że V i TV mają naturalne struktury rozmaitości różniczkowych. Niech $\mathcal{T}V$ oznacza wiązkę styczną w sensie geometrii różniczkowej. Udowodnić, że TV jest dyfeomorficzna z $\mathcal{T}V$ i że ten dyfeomorfizm jest zgodny z rzutowaniami $\pi_V : TV \to V$ i $\mathcal{T}V \to V$.

6. Załóżmy, że $0 = (0, \ldots, 0) \in V$. Definiujemy przekształcenie K-dwuliniowe:
$$\Psi : K^n \times K[X_1, \ldots, X_n] \to K, \quad \Psi(\bar{x}, F) = \partial F(0, \bar{x}).$$
Udowodnić, że:
   (a) $\Psi(\pi_V^{-1}(0) \times I(V)) = 0$;
   (b) $\Psi(K^n \times I(0)^2) = 0$;
   (c) następujące przekształcenie K-dwuliniowe indukowane (dzięki (a) i (b)) z Ψ
   $$\widetilde{\Psi} : \pi_V^{-1}(0) \times I_V(0)/I_V(0)^2 \to K$$
   jest niezdegenerowane (przypominam, że: $I(0), I(V) \lhd K[X_1, \ldots, X_n], I_V(0) \lhd K[V]$).

7. Niech R będzie UFD, $r \in R$ będzie nierozkładalny i $L = R_0$. Definiujemy
$$v_r : L^* \to \mathbb{Z}, \qquad v_r(\alpha) = n \text{ dla } \alpha = r^n \frac{a}{b}, \text{ gdzie } a, b \in R \text{ oraz } r \nmid ab.$$
Dla $\alpha, \beta \in L^*$ udowodnić, że:
   (a) jeśli $\alpha + \beta \in L^*$, to $v_r(\alpha + \beta) \geqslant \min(v_r(\alpha), v_r(\beta))$;
   (b) $v_r(\alpha\beta) = v_r(\alpha) + v_r(\beta)$;
   (c) $v_r(L^*) = \mathbb{Z}$.

8. Niech $(R, \mathfrak{m})$ będzie pierścieniem DVR i v_R valuacją daną przez parametr uniformizujący R. Udowodnić, że dla dowolnego $a \in R \setminus \{0\}$ mamy $v_R(a) = n$, gdzie $a \in \mathfrak{m}^n \setminus \mathfrak{m}^{n+1}$ ($\mathfrak{m}^0 := R$).

9. Niech v będzie waluacją (dyskretną) na ciele L. Definiujemy
$$\mathcal{O}_v := \{x \in L \mid v(x) \geqslant 0\}, \quad \mathfrak{m}_v := \{x \in L \mid v(x) > 0\}.$$
Udowodnić, że $(\mathcal{O}_v, \mathfrak{m}_v)$ jest pierścieniem DVR i że $v = v_{\mathcal{O}_v}$.