GEOMETRIA ALGEBRAICZNA, Lista 5

Niech K będzie ciałem algebraicznie domkniętym i R będzie pierścieniem.

1. Niech $k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{N}_{>0}$ i $F \in K[X] \setminus \{0\}$.

   (a) Udowodnić, że:
   $$\dim_K(K[X]/(F)) = \deg(F).$$

   (b) Dla $n \in \mathbb{N}_{>0}$, obliczyć:
   $$\dim_K \left(K[X_1, \ldots, X_n]/(X_1^{k_1}, \ldots, X_n^{k_n}) \right).$$

2. Niech $I, J \trianglelefteq R$ oraz $I \subseteq \sqrt{J}$. Udowodnić, że jeśli ideał I jest skończenie generowany, to istnieje $n \in \mathbb{N}$ takie, że $I^n \subseteq J$.

3. Niech $P \subseteq I \subseteq Q$ będą ideałami w dziedzinie R takimi, że P i Q są pierwsze. Udowodnić, że:
   $$\frac{R_Q}{IR_Q} \cong \frac{(R/P)_{Q/P}}{I/P(R/P)_{Q/P}}.$$

4. Niech C będzie krzywą afiniczną, $v \in C$ punktem gładkim i $f \in K(C)$. Udowodnić, że f jest lokalnym parametrem C w punkcie v wtedy i tylko wtedy, gdy f ma zero w punkcie v rzędu 1.

5. Niech C będzie krzywą planarną i niech $0 = (0, 0) \in C$. Udowodnić, że przestrzeń styczna $T_0(C)$ (tu rozumiana jako $\pi_C^{-1}(0) \subseteq \mathbb{A}^2$, gdzie $\pi_C : TC \to C$ jest rzutowaniem) jest sumą (teorio-mnogościową) prostych stycznych do C w punkcie 0.

6. Obliczyć następujące krotności przecięcia:

   (a) $I(0, (Y - X^2) \cap (Y^m + X^{2m}))$ dla $m \in \mathbb{N}_{>0}$;
   (b) $I(0, (Y^4 + X^4 - X^2) \cap (Y^2 - X^3 + X^2))$;
   (c) $I(0, (Y^4X^3 + X^4Y^2 - X^2 + Y^7 + Y^2 + Y) \cap (Y^2 - Y^5X^3 + 1 + X^2))$;
   (d) $I(0, (Y - X^2) \cap (Y^3 + X^6))$;
   (e) $I(0, (Y^4 + X^4 - X^2) \cap (Y^2 - X^3 + X^2))$;
   (f) $I(0, (XY^4 + X^4 - X^2 + X^8 + X) \cap (XY^2 - X^3 + X^2))$.

7. Niech S będzie podzbiorem multyplikatywnym pierścienia R.

   (a) Przypomnieć definicję lokalizacji R_S (R nie musi byc dziedziną!).

   (b) Opisać jądro homomorfizmu
   $$\varphi : R \to R_S, \quad \varphi(r) = \frac{r}{1}.$$

   (c) Niech P będzie ideałem pierwszym w R oraz $e \in R \setminus P$ elementem takim, że $e^2 = e$. Niech $\varphi : R \to R_P$ będzie jak w podpunkcie (b) powyżej. Udowodnić, że φ obcięte do eR zadaje izomorfizm pierścieni (z jedynką):
   $$eR \cong R_P.$$