GEOMETRIA ALGEBRAICZNA, Lista 6

Niech K będzie ciałem algebraicznie domkniętym, R będzie pierścieniem i $m, n \in \mathbb{N}_{>0}$.

1. Załóżmy, że $e_1, \ldots, e_m \in R$ są takie, że:

   (a) $e_1^2 = e_1, \ldots, e_m^2 = e_m$;

   (b) $e_1 + \ldots + e_m = 1$;

   (c) dla każdych $i \neq j$ mamy $e_i e_j = 0$.

   Udowodnić, że funkcja:

   $$f : R \to e_1 R \times \ldots \times e_m R, \quad f(r) = (re_1, \ldots, re_m)$$

   jest izomorfizmem pierścieni (przemiennych z 1).

2. Załóżmy, że I, J są ideałami w R takimi, że $I + J = R$. Udowodnić, że $I^n + J^m = R$.

3. Dla $i \in \{1, \ldots, n+1\}$ określamy:

   $$\pi_i : \mathbb{P}^{n-1} \to \mathbb{P}^n, \quad \pi_i([a_1 : \ldots : a_n]) = [a_1 : \ldots : a_{i-1} : 0 : a_i : \ldots : a_n].$$

   Udowodnić, że funkcja π_i jest dobrze określona i że jest różnowartościowa.

4. Dla $i \in \{1, \ldots, n+1\}$ określamy:

   $$\varphi_i : \mathbb{A}^n \to \mathbb{P}^n, \quad \varphi_i(a_1, \ldots, a_n) = [a_1 : \ldots : a_{i-1} : 1 : a_i : \ldots : a_n]$$

   i definiujemy $U_i := \varphi_i(\mathbb{A}^n) \subset \mathbb{P}^n$.

   (a) Udowodnić, że w przypadku $n = 1$ mamy

   $$\varphi_1^{-1}(U_1 \cap U_2) = \varphi_2^{-1}(U_1 \cap U_2) = \mathbb{A}^1 \setminus \{0\};$$

   $$\forall x \in \mathbb{A}^1 \setminus \{0\} \qquad \varphi_2^{-1}(\varphi_1(x)) = 1/x.$$

   Czyli $\mathbb{P}^1$ możemy rozumieć jako dwie kopie $\mathbb{A}^1$ sklejone wzdłuż podzbioru (tego samego dla obu kopii) $\mathbb{A}^1 \setminus \{0\} \subset \mathbb{A}^1$ dzięki następującej funkcji sklejenia:

   $$\mathbb{A}^1 \setminus \{0\} \to \mathbb{A}^1 \setminus \{0\}, \quad x \mapsto 1/x.$$

   (b) Uogólnić podpunkt (a) powyżej z przypadku $n = 1$ na przypadek dowolnego $n \in \mathbb{N}_{>0}$.

   (c) Zdefiniować (sensownie!) topologię Zariskiego na $\mathbb{P}^n$ używając podpunktu (b) powyżej.

   (d) Dla $K = \mathbb{C}$ zdefiniować (sensownie!) topologię euklidesową na $\mathbb{P}^n$ używając podpunktu (b) powyżej.

   (e) Dla $K = \mathbb{C}$ zdefiniować (sensownie!) strukturę rozmaitości (zespolonej bądź różniczkowej) na $\mathbb{P}^n$ używając podpunktów (b) i (d) powyżej.

   (f) Dla $K = \mathbb{C}$, udowodnić że mamy dyfeomorfizm

   $$\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \cong S^2,$$

   gdzie S^2 jest sferą (Riemanna), używając podpunktu (e) powyżej.