GEOMETRIA ALGEBRAICZNA, Lista 7

Niech K będzie ciałem algebraicznie domkniętym i $m, n \in \mathbb{N}_{>0}$.

1. Niech X będzie noetherowską przestrzenią topologiczną oraz
$$X = \bigcup_{i\in I} U_i$$
będzie otwartym pokryciem X. Udowodnić, że:
$$\dim(X) = \sup_{i\in I} \dim(U_i).$$

2. Udowodnić, że każde dwie proste w $\mathbb{P}^2$ mają niepusty przekrój.

3. Niech $H \in K[X_1, \ldots, X_n]$ i $d \in \mathbb{N}$. Udowodnić, że następujące warunki są równoważne:
   (a) wielomian H jest jednorodny stopnia d;
   (b) dla każdego $\lambda \in K$ zachodzi następująca równość w pierścieniu $K[X_1, \ldots, X_n]$:
$$H(\lambda X_1, \ldots, \lambda X_n) = \lambda^d H.$$

4. Niech $F \in K[X_1, \ldots, X_n]$, $d \in \mathbb{N}$ i załóżmy, że:
   (a) $F = F_0 + \ldots + F_d$;
   (b) $F_d \neq 0$;
   (c) dla każdego $i \leqslant d$, wielomian F_i jest jednorodny stopnia i lub $F_i = 0$.

   Udowodnić, że:
$$\sum_{i=0}^{d} X_{n+1}^{d-i} F_i = X_{n+1}^{d} F\left(\frac{X_1}{X_{n+1}}, \ldots, \frac{X_n}{X_{n+1}}\right).$$

5. Znaleźć punkty w nieskończoności planarnych krzywych afinicznych poniżej i sprawdzić, czy te punkty są gładkie:
   (a) $V(\alpha X + \beta Y + 1)$ dla ustalonego $(\alpha, \beta) \in K^2 \setminus \{(0,0)\}$;
   (b) $V(Y^2 - X^3)$;
   (c) $V(X^3 + Y^3 + 1)$;
   (d) krzywe z zadania 10. z Listy 3.

6. Niech L będzie ciałem zawierającym n-ty pierwotny pierwiastek z jedynki i $a \in L$. Udowodnić, że następujące warunki są równoważne:
   (a) wielomian $X^n - a$ jest nierozkładalny (w pierścieniu $L[X]$);
   (b) dla każdej liczby $l > 1$ dzielącej n i każdego $b \in L$ mamy $b^l \neq a$.

7. Udowodnić, że wielomian $X^n - Y^m$ jest nierozkladalny w pierścieniu $K[X, Y]$ wtedy i tylko wtedy, gdy liczby n i m są względnie pierwsze.