

## GEOMETRIA ALGEBRAICZNA, Lista 8

Niech  $K$  będzie ciałem algebraicznie domkniętym i  $m, n \in \mathbb{N}$ .

1. Niech  $V$  będzie rozmaitością rzutową i  $U \subseteq V$  niepustym i otwartym podzbiorem  $V$ . Udowodnić, że

$$\dim(U) = \dim(V).$$

2. Rozważmy naturalne działanie grupy  $\mathrm{GL}_3(K)$  na  $K^3$ . Udowodnić, że to działanie indukuje tranzytywne działanie  $\mathrm{GL}_3(K)$  na:

- (a)  $\mathbb{P}^2$ ;
- (b) zbiorze podprzestrzeni liniowych wymiaru 2 w  $K^3$ ;
- (c) zbiorze prostych w  $\mathbb{P}^2$ .

3. Dla  $A \in \mathrm{GL}_3(K)$  i  $F \in K[X, Y, Z]$  rozważmy

$$A \cdot F := F \left( A \cdot \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} \right) \in K[X, Y, Z].$$

Udowodnić, że:

- (a) powyższy wzór zadaje działanie  $\mathrm{GL}_3(K)$  na  $K[X, Y, Z]$ ;
  - (b) działanie to dla każdego  $d \in \mathbb{N}$  zachowuje zbiór wielomianów jednorodnych stopnia  $d$ .
4. Udowodnić, że działanie z zadania 3. zadaje działanie  $\mathrm{GL}_3(K)$  na zbiorze podzbiorów algebraicznych  $\mathbb{P}^2$  i że to działanie obcięte do zbioru prostych w  $\mathbb{P}^2$  pokrywa się z działaniem z zadania 2(c).
  5. Niech  $F, G$  będą wielomianami jednorodnymi w  $K[X, Y, Z]$ ,  $x \in \mathbb{P}^2$  i  $A \in \mathrm{GL}_3(K)$ . Udowodnić, że (używając poprzednich zadań, aby zinterpretować odpowiednie działania) mamy:

$$I(x, F \cap G) = I(A \cdot x, (A \cdot F) \cap (A \cdot G)).$$

6. Niech

$$0 \rightarrow A_1 \rightarrow A_2 \rightarrow \dots \rightarrow A_n \rightarrow 0$$

będzie ciągiem dokładnym skończenie wymiarowych przestrzeni liniowych nad  $K$ . Udowodnić, że:

$$\sum_{i=1}^n (-1)^i \dim_K(A_i) = 0.$$

7. Dla  $k \in \mathbb{N}$ , niech  $R_k$  będzie przestrzenią  $K$ -liniową składającą się z wielomianów jednorodnych stopnia  $k$  w  $K[X, Y, Z]$ . Załóżmy, że  $d \geq m + n$  i że mamy ciąg dokładny postaci

$$0 \rightarrow R_{d-m-n} \rightarrow R_{d-m} \times R_{d-n} \rightarrow R_d \rightarrow E \rightarrow 0,$$

gdzie  $E$  jest pewną przestrzenią liniową nad  $K$ . Udowodnić, że:

$$\dim_K(E) = mn.$$

8. Dla  $F \in K[X_1, \dots, X_n]$ , niech  $F^* \in K[X_1, \dots, X_{n+1}]$  będzie homogenizacją wielomianu  $F$  względem zmiennej  $X_{n+1}$ . Udowodnić, że dla dowolnych  $F, G \in K[X_1, \dots, X_n]$  mamy:

$$X_{n+1}^t (F + G)^* = X_{n+1}^r F^* + X_{n+1}^s G^*,$$

gdzie:

$$r = \deg(G), \quad s = \deg(F), \quad t = r + s - \deg(F + G).$$