GEOMETRIA ALGEBRAICZNA, Lista 9

Niech K będzie ciałem algebraicznie domkniętym i $n \in \mathbb{N}$.

1. Co się stanie jeśli skleimy dwie kopie $\mathbb{A}^1$ wzdłuż $\mathbb{A}^1 \setminus \{0\}$ używając funkcji identycznościowej? Czy dla $K = \mathbb{C}$, powyższa przestrzeń jest Hausdorffa w “topologii euklidesowej”?

2. Udowodnić, że dla $K = \mathbb{C}$, przestrzeń $\mathbb{P}^n$ jest zwarta w “topologii euklidesowej”.

3. Niech $V \subseteq \mathbb{A}^n$ będzie zbiorem domkniętym Zariskiego takim, że $\dim(V) > 0$. Udowodnić, że $V^* \neq V$, gdzie $V^* \subseteq \mathbb{P}^n$ jest homogenizacją V.

4. Niech $A, B \in K$. Definiujemy:
$$E := V(Y^2 - X^3 - AX - B) \subseteq \mathbb{A}^2.$$
Udowodnić, że:
   (a) krzywa E ma jedyny punkt w nieskończoności i ten punkt jest gładki;
   (b) jeśli $\mathrm{char}(K) \notin \{2, 3\}$, to E ma co najwyżej jeden punkt osobliwy;
   (c) jeśli $\mathrm{char}(K) \notin \{2, 3\}$, to E jest gładka wtedy i tylko wtedy, gdy $4A^3 + 16B^2 \neq 0$.

5. Niech A, B, E będą jak w zadaniu 4. Załóżmy, że E^* jest gładka i weźmy krzywą eliptyczną (E^*, O), gdzie O jest punktem w nieskończoności E. Niech $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in E$ będą dwoma różnymi punktami na krzywej E, takimi że
$$(x_3, y_3) := (x_1, y_1) \oplus (x_2, y_2) \in E.$$
Udowodnić, że
$$x_3 = \lambda^2 + a_1\lambda - a_2 - x_1 - x_2, \quad y_3 = -(\lambda + a_1)x_3 - \nu - a_3,$$
gdzie $Y = \lambda X + \nu$ jest równaniem prostej w $\mathbb{A}^2$ przechodzącej przez punkty $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$.

6. Niech $K = \mathbb{C}$ oraz
$$E := V(Y^2 - X^3 - 17) \subseteq \mathbb{A}^2.$$
Niech (E^*, O) będzie krzywą eliptyczną jak w zadaniu 5. Sprawdzić, że:
$$P_1 := (-2, 3), P_2 := (-1, 4), P_3 = (2, 5) \in E$$
oraz policzyć współrzędne następujących punktów ($\oplus$ to dodawanie i $\ominus$ to odejmowanie na krzywej eliptycznej (E^*, O)):
   (a) $P_1 \ominus P_3$;
   (b) $P_2 \oplus P_2$;
   (c) $P_2 \oplus P_3$.

7. Niech p będzie liczbą pierwszą, $K = \mathbb{F}_p^{\mathrm{alg}}$ oraz
$$E_p := V(Y^2 - X^3 - 17) \subseteq \mathbb{A}^2_K.$$
Dla jakich liczb pierwszych p, krzywa afiniczna E_p jest gładka?

8. Niech $x = [a : b : 1] \in P^2$ i L będzie prostą w $\mathbb{P}^2$ przechodzącą przez punkty x oraz $[0 : 1 : 0]$. Udowodnić, że prosta afiniczna $L_* = L \cap \mathbb{A}^2$ jest równoległa do osi OY.