GRUPY ALGEBRAICZNE, Lista 1

K jest ciałem algebraicznie domkniętym, $n \in \mathbb{N}_{>0}$.

1. Udowodnić, że $\mathrm{UT}_n(K)$ jest nilpotentna stopnia $n-1$.
2. Udowodnić, że $T_n(K)$ jest rozwiązalna stopnia n.
3. Udowodnić, że:
   - $K^*I = Z(\mathrm{GL}_n(K))$.
   - $(K^*I) \cap \mathrm{SL}_n(K) = Z(\mathrm{SL}_n(K))$.
4. Udowodnić, że $\mathrm{PSL}_n(K)$ jest prosta.
5. Niech $\mathrm{char}(K) = 0$. Udowodnić, że:
   - $\mathrm{End}(\mathbb{G}_a^n(K)) \cong M_n(K)$.
   - $\mathrm{Aut}(\mathbb{G}_a^n(K)) \cong \mathrm{GL}_n(K)$.
6. Niech $\mathrm{char}(K) = p$. Opisać $\mathrm{End}(\mathbb{G}_a(K))$.
7. Udowodnić, że:
   - $\mathrm{End}(\mathbb{G}_m^n(K)) \cong M_n(\mathbb{Z})$.
   - $\mathrm{Aut}(\mathbb{G}_m^n(K)) \cong \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})(:= \{a \in M_n(\mathbb{Z}) : \det(A) = \pm 1\})$.
8. Niech $\phi : \mathbb{G}_m(K) \to \mathbb{G}_a(K),\ \psi : \mathbb{G}_a(K) \to \mathbb{G}_m(K)$ będa homomorfizmami grup algebraicznych. Udowodnić, że $\phi = 0,\ \psi = 0$.
9. Niech $f : V \to W$ będzie morfizmem afinicznych rozmaitości algebraicznych i $f^* : K[W] \to K[V]$ indukowanym homomorfizmem pierścieni funkcji regularnych. Udowodnić, że:
   - f jest dominujący wtedy i tylko wtedy, gdy f^* jest "1-1".
   - f jest domkniętym włożeniem wtedy i tylko wtedy, gdy f^* jest "na".
10. Niech V, W będą afinicznymi rozmaitościami algebraicznymi. Udowodnić, że:
    - $K[V \times W]$ jest generowany przez obrazy $K[V]$ i $K[W]$.
    - $V \times W$ jest nierozkładalna wtedy i tylko wtedy, gdy V i W są nierozkładalne.