GRUPY ALGEBRAICZNE, Lista 2

K jest ciałem algebraicznie domkniętym, $n \in \mathbb{N}_{>0}$.

1. Udowodnić, że:
   - $D_n(K)^0 = D_n(K)$,
   - $\mathrm{GL}_n(K)^0 = \mathrm{GL}_n(K)$,
   - $\mathrm{SL}_n(K)^0 = \mathrm{SL}_n(K)$,
   - $T_n(K)^0 = T_n(K)$,
   - $\mathrm{UT}_n(K)^0 = \mathrm{UT}_n(K)$,
   - $O_n(K)^0 = \mathrm{SO}_n(K)$, gdzie $O_n(K) := \{A \in \mathrm{GL}_n(K) : A^T A = I\}$ (A^T to macierz transponowana), $\mathrm{SO}_n(K) := O_n(K) \cap \mathrm{SL}_n(K)$.

2. Mnożenie w ciele K jest też algebraicznym działaniem $\mathbb{G}_m(K)$ na $\mathbb{G}_a(K)$ poprzez automorfizmy grup algebraicznych. Udowodnić, że:
   - $\mathbb{G}_a(K) \rtimes \mathbb{G}_m(K)$ jest afiniczną grupą algebraiczną.
   - $\mathbb{G}_a(K) \rtimes \mathbb{G}_m(K)$ jest rozwiązalna.
   - $\mathbb{G}_a(K) \rtimes \mathbb{G}_m(K)$ nie jest nilpotentna.
   - Znaleźć izomorfizm $\mathbb{G}_a(K) \rtimes \mathbb{G}_m(K)$ z liniową grupą algebraiczną.
   - Udowodnić, że $\mathbb{G}_a(K) \rtimes \mathbb{G}_m(K)$ jest izomorficzna z grupą elementów odwracalnych pierścienia $(K[X], +, \circ)$, gdzie $\circ$ jest działaniem składania wielomianów.

3. Załóżmy, że $\mathrm{char}(K) = p > 0$. Udowodnić, że $A \in \mathrm{GL}_n(K)$ jest unipotentna wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje $r \in \mathbb{N}$ taki, że $A^{p^r} = I$.

4. Znaleźć addytywny rozkład Jordana $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

5. Niech X, Y, Z będą afinicznymi rozmaitościami algebraicznymi. Załóżmy, że morfizm $f : X \to Z$ jest dominujący oraz X i Y są nierozkładalne. Dowieść, że $X \times Y$ oraz Z są nierozkładalne.