GRUPY ALGEBRAICZNE, Lista 3

K jest ciałem algebraicznie domkniętym.

1. Niech W będzie podprzestrzenią liniową K-przestrzeni liniowej V i niech $\phi \in \mathrm{End}(V)$. Załóżmy, że $\phi(W) \subseteq W$ i ϕ jest półprosty. Udowodnić, że indukowany $\bar{\phi} \in \mathrm{End}(V/W)$ jest też półprosty.
2. Niech R będzie pierścieniem przemiennym, r elementem odwracalnym w R i s elementem nilpotentym w R. Udowodnić, że $r + s$ jest odwracalny.
3. Niech V będzie przestrzenią liniową nad K i $\phi \in \mathrm{End}(V)$ będzie lokalnie skończony. Udowodnić, że ϕ jest półprosty wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje baza V, w której ϕ ma postać diagonalną.
4. Niech V, W będą przestrzeniami liniowymi nad K i $\phi \in \mathrm{End}(V), \psi \in \mathrm{End}(W)$ będą lokalnie skończone. Udowodnić, że:
   (a) $(\phi \otimes \psi)_s = \phi_s \otimes \psi_s$,
   (b) $(\phi \otimes \psi)_n = \phi_n \otimes \psi_n$,
   (c) $(\phi \oplus \psi)_s = \phi_s \oplus \psi_s$,
   (d) $(\phi \oplus \psi)_n = \phi_n \oplus \psi_n$.
5. Niech Y, Z będą afinicznymi rozmaitościami algebraicznymi. Udowodnić, że następujące funkcje są bijekcjami:
   (a) $\mathrm{Mor}(Y, Z) \ni f \mapsto f^* \in \mathrm{Hom}(K[Z], K[Y])$,
   (b) $Y \ni v \mapsto \phi_v \in \mathrm{Hom}(K[Y], K), \quad \phi_v(f) = f(v)$.
6. Udowodnić, że jeśli $f : H \to G$ jest homomorfizmem grup algebraicznych, to $f(H)$ jest domknięta w G (użyć twierdzenia Chevalley'a!).
7. Niech H będzie domknięta podgrupą afinicznej grupy algebraicznej G i niech $I := \{f \in K[G] : f|_H = 0\}$. Udowodnić, że
$$H = \{g \in G : \lambda_g(I) = I\}.$$