GRUPY ALGEBRAICZNE, Lista 4

K jest ciałem algebraicznie domkniętym.

1. Znaleźć przykład afinicznej grupy algebraicznej G takiej, że:
   (a) G_s nie jest domknięty,
   (b) G_s nie jest otwarty,
   (c) G_s nie jest podgrupą,
   (d) G_u nie jest podgrupą.
2. Niech $A \in M_n(K)$. Udowodnić, że jeśli $A \neq 0$, to istnieje $B \in M_n(K)$ taka, że $\mathrm{tr}(AB) \neq 0$.
3. Niech G będzie afiniczną grupą algebraiczną i $(f_i : X_i \to G)_{i \in I}$ rodziną morfizmów o nierozkładalnych dziedzinach. Niech H będzie podgrupą G generowaną przez zbiór $\bigcup_{i \in I} f_i(X_i)$. Wtedy:
   (a) H jest domknięta i spójna,
   (b) Istnieją $n \in \mathbb{N}$, $i_1, \ldots, i_n \in I$, $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n \in \{-1, 1\}$ takie, że $H = Y_{i_1}^{\varepsilon_1} \cdot \ldots \cdot Y_{i_n}^{\varepsilon_n}$.
4. Załóżmy, że $\mathrm{char}(K) = 2$. Niech
$$(x, x') \dot{+} (y, y') := (x + y, x' + y' + xy).$$
Udowodnić, że $G := (\mathbb{A}^2, \dot{+})$ jest przemienną unipotentną grupą algebraiczną, która nie jest grupą wektorową.