GRUPY ALGEBRAICZNE, Lista 5

K jest ciałem algebraicznie domkniętym.

1. Niech A, B będą przemiennymi grupami algebraicznymi. Definiujemy homomorfizmy grup (Mor to morfizmy, niekoniecznie homomorfizmy!):

$$\mathrm{d}^1 : \mathrm{Mor}(B, A) \to \mathrm{Mor}(B^2, A), \quad \mathrm{d}^2 : \mathrm{Mor}(B^2, A) \to \mathrm{Mor}(B^3, A),$$

$$\mathrm{d}^1(H)(x, y) = H(x + y) - H(x) - H(y),$$
$$\mathrm{d}^2(F)(x, y, z) = F(x + y, z) + F(x, y) - F(x, y + z) - F(y, z).$$

Udowodnić, że

(a) $\mathrm{d}^2 \circ \mathrm{d}^1 = 0$,

(b) Niech $F : B^2 \to A$ będzie morfizmem takim, że $F(x, y) = F(y, x)$. Zdefiniujmy:

$$(a_1, b_1) +_F (a_2, b_2) := (a_1 + a_2 + F(b_1, b_2), b_1 + b_2).$$

$(A \times B, +_F)$ jest przemienną grupą algebraiczną wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathrm{d}^2(F) = 0$,

(c) Dla F_1, F_2 jak wyżej, $(A \times B, +_{F_1}) \cong (A \times B, +_{F_2})$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje morfizm $H : B \to A$ taki, że $F_1 - F_2 = \mathrm{d}^1(H)$.

2. Niech p będzie liczbą pierwszą, oraz $n, m \in \mathbb{N}$. Udowodnić, że jeśli $p|n$, $m < n$ i $p \nmid m$, to $p|\binom{n}{m}$.