GRUPY ALGEBRAICZNE, Lista 6 (funkcje addytywne)

K jest ciałem algebraicznie domkniętym, σ jest automorfimem K. Niech $K[X^\sigma]$ będzie pierścieniem, którego uniwersum jest $K[X]$, dodawanie jest dodawaniem wielomianów i

$$(\sum_i a_i X^i) \cdot (\sum_j a_j X^j) := \sum_{i,j} a_i(\sigma^i(b_j))X^{i+j}.$$

1. Udowodnić, że każdy lewy ideał w $K[X^\sigma]$ jest główny i każdy prawy ideał w $K[X^\sigma]$ jest główny.

2. Niech M będzie skończenie generowanym lewym $K[X^\sigma]$-modułem. Udowodnić, że:

   (a) M jest sumą prostą modułów cyklicznych.

   (b) Jeśli M jest beztorsyjny, to M jest wolny.

3. Niech G, H będą afinicznymi grupami algebraicznymi i $\mathrm{Hom}(G, H)$ oznacza zbiór homorfizmów grup algebraicznych pomiędzy G i H. Załóżmy, że $\mathrm{char}(K) = p > 0$. Opisać strukturę lewego $K[X^{\mathrm{Fr}}]$-modułu na $\mathrm{Hom}(G, \mathbb{G}_a)$ zadaną przez działanie składania $\mathrm{Hom}(\mathbb{G}_a, \mathbb{G}_a)$ na $\mathrm{Hom}(G, \mathbb{G}_a)$ (Fr to automorfizm Frobeniusa $\mathrm{Fr}(x) = x^p$).

4. Niech G i K będą jak w zadaniu 3. Udowodnić, że:

   (a) Jeśli G jest spójna, to $\mathrm{Hom}(G, \mathbb{G}_a)$ jest lewym $K[X^{\mathrm{Fr}}]$-modułem, który jest beztorsyjny.

   (b) Jeśli $f_1, \ldots, f_n \in \mathrm{Hom}(G, \mathbb{G}_a)$ są liniowo niezależne nad $K[X^{\mathrm{Fr}}]$, to są algebraicznie niezależne nad K (w $K[G]$).

   (c) Udowodnić, że dla każdych $f_1, \ldots, f_n \in \mathrm{Hom}(G, \mathbb{G}_a)$ istnieją $g_1, \ldots, g_m \in \mathrm{Hom}(G, \mathbb{G}_a)$ takie, że $K[f_1, \ldots, f_n] = K[g_1, \ldots, g_m]$ i $g_1, \ldots, g_m$ są algebraicznie niezależne nad K.

   (d) Załóżmy, że istnieją $f_1, \ldots, f_n \in \mathrm{Hom}(G, \mathbb{G}_a)$ takie, że $K[G] = K[f_1, \ldots, f_n]$. Udowodnić, że G jest grupą wektorową.