GRUPY ALGEBRAICZNE, Lista 7 (Twierdzenie Burnside'a)

R to pierścień z 1, niekoniecznie przemienny, E to (lewy) R-moduł.

1. Udowodnić, że następujące warunki są równoważne (definiujące *moduł półprosty*):

   (a) E jest sumą prostą modułów prostych.

   (b) Każdy podmoduł $E_1 < E$ jest składnikiem prostym, tzn. istnieje $E_2 < E$ taki, że $E = E_1 \oplus E_2$.

   Od tej pory E jest półprosty i $S := \mathrm{End}_R(E)$.

2. Udowodnić, że E jest S modułem i że odwzorowanie
$$R \ni \alpha \mapsto f_\alpha \in \mathrm{End}_S(E), \quad f_\alpha(x) = \alpha x$$
   jest homomorfizmem pierścieni.

3. Weźmy $f \in \mathrm{End}_S(E)$ i $v \in E$. Udowodnic, że istnieje $\alpha \in R$ takie, że $f(v) = \alpha v$. Wskazówka: $Rv < E$ jest składnikiem prostym.

4. **Twierdzenie o gęstości (Jacobson)**
   Niech $x_1, \ldots, x_n \in E$. Udowodnić, że istnieje $\alpha \in R$ taka, że dla $i \leqslant n$ mamy $f(x_i) = \alpha x_i$. Wskazówka: użyć 3. dla E^n.

5. Niech K będzie ciałem algebraicznie domkniętym, E skończenie wymiarową przestrzenią liniową nad K i R niech będzie K-podalgebrą $\mathrm{End}_K(E)$. Załóżmy, że E jest R-modułem prostym. Udowodnić, że:

   (a) $S (= \mathrm{End}_R(E))$ jest pierścieniem z dzieleniem,

   (b) $S = K$,

   (c) **Twierdzenie Burnside'a**
   $R = \mathrm{End}_K(E)$.
   Wskazówka: Użyć twierdzenia o gęstości dla K-bazy E.