GRUPY ALGEBRAICZNE, Lista 8 (Ciągi dokładne)

Niech

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

będzie ciągiem dokładnym grup przemiennych, tzn. f jest monomorfizmem, g jest epimorfizmem i $\operatorname{Ker} g = \operatorname{Im} f$.

1. Udowodnić, że następujące warunki są równoważne:

   (a) Istnieje homomorfizm $f_0 : B \to A$ taki, że $f_0 \circ f = \mathrm{id}_A$.

   (b) Istnieje homomorfizm $g_0 : C \to B$ taki, że $g \circ g_0 = \mathrm{id}_C$.

   Jeśli warunki te są spełnione to mówimy, że ciąg dokładny się *rozszczepia*.

2. Załóżmy, że nasz ciąg dokładny się rozszczepia poprzez f_0, g_0 jak w 1. Udowodnić, że:

   (a) $B = \operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Ker} f_0$,

   (b) $B = \operatorname{Ker} g \oplus \operatorname{Im} g_0$,

   (c) $B \cong A \times C$.

3. Jeśli X jest skończoną rozmaitością afiniczną i Y rozmaitością afiniczną, to dowolna funkcja $f : X \to Y$ jest morfizmem.

4. Jeśli f i g są homomorfizmami przemiennych grup algebraicznych, C jest skończona i ciąg dokładny się rozszczepia, to $B \cong A \times C$ (izomorfizm grup algebraicznych).