GRUPY ALGEBRAICZNE, Lista 9 (ilorazy)

G jest afiniczną grupą algebraiczną, H jest domkniętą podgrupą G, K jest ciałem algebraicznie domkniętym,

$$A := \{f \in K[G] : (\forall g \in G, h \in H) f(gh) = f(g)\}.$$

1. Udowodnić, że jeśli rozmaitość G/H jest afiniczna, to $K[G/H] \cong A$.
2. Udowodnić, że rozmaitość G/H jest afiniczna wtedy i tylko wtedy, gdy K-algebra A jest skończenie generowana nad K i dla $a, b \in G$ jeśli $aH \neq bH$, to istnieje $f \in A$ taka, że $f(a) \neq f(b)$.
3. Udowodnić, że następujące warunki są równoważne:
   (a) rozmaitość G/H jest nierozkładalna,
   (b) H ma niepusty przekrój z każdą składową G,
   (c) $G = G^0 H$.
4. Udowodnić, że jeśli każdy homomorfizm grup algebraicznych $H \to \mathbb{G}_m$ jest trywialny, to rozmaitość G/H jest quasi-afiniczna.
5. Udowodnić, że $\mathbb{P}^1(K) \cong \mathrm{SL}_2(K)/T_2(K) \cap \mathrm{SL}_2(K)$.
6. Udowodnić, że $K^2 \setminus \{(0,0)\} \cong \mathrm{SL}_2(K)/\,\mathrm{UT}_2(K)$.
7. Udowodnić, że rozmaitość $K^2 \setminus \{(0,0)\}$ nie jest afiniczna.
8. Udowodnić, że jeśli G jest przemienna, unipotentna i $\dim G = n > 1$, to istnieją ciągi dokładne grup algebraicznych

$$0 \to \mathbb{G}_a \to G \to G_1 \to 0,$$

$$0 \to G_2 \to G \to \mathbb{G}_a \to 0,$$

gdzie G_1, G_2 są pewnymi unipotentnymi grupami przemiennymi wymiaru $n - 1$.